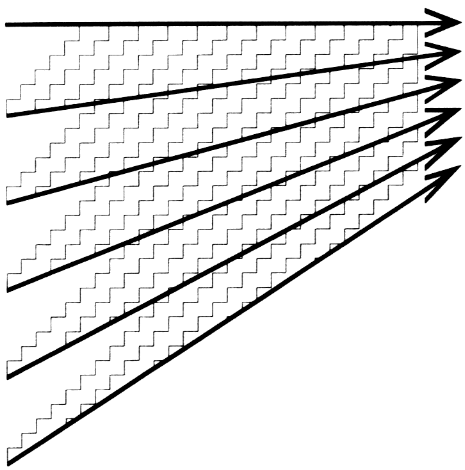
時間の物理学

その非対称性

P.C.W. デイビス 著

戸田盛和・田中 裕 共訳



培風館

The Physics of Time Asymmetry
by P. C. W. Davies

Published by
Surrey University Press
Kingswood House, Heath & Reach, Leighton Buzzard, Beds.
LU7 0AZ and 450 Edgware Road, London, W2 1EG.

スーザンに捧ぐ

謝　辞

有益な助言を下さった P. T. Landsberg 教授，D. Robinson 博士，W. C. Saslaw 博士，M. Rowan-Robinson 博士，清書を手伝って下さった M. Woodcock 夫人に感謝いたします。

訳者序文

“時間とは何だろうか”ということは，有限の生命をもつ私たちにとって本質的に切実な疑問である。これに対して，自然科学の中で最も確実に“時間”をとらえていると思われる物理学がなしえる答えを，著者はこの本に述べようとしている。

日常生活の中で考えている“時間”は，各瞬間では逆転できそうに見えることはあっても，間もなく，元へもどせぬ過去へと流れる非可逆性をもっている。むずかしい哲学的議論を別にしても，明らかに知覚される時間というものがあり，それには日常的時間，心理学的時間，生物学的時間，そして物理的な時間などの別を考えることもできるが，おおまかにいって，それらは同じ向きに流れている非可逆的な“時間”である。

しかし，ニュートン力学に用いられている“時間”は運動を記述するパラメタにすぎず，純粋に力学的な運動，すなわち摩擦によって力学的エネルギーが熱に変わる現象などがなければ，ニュートン力学は時間に対して対称的である。力学だけでなく，電磁気学，相対論，量子力学などの物理学の基礎方程式は過去と未来を取り替えることができる対称性をもつ。

このように非可逆的な時間と時間対称性とはどうしたら融合できるであろうかということは，一応科学を学んだ人にとって興味ある問題であるから，これを扱った書物が通俗書を含めれば極めて数多く存在するのも不思議ではない。本書では基礎的な物理学を確実にふまえながら，境界条件や初期条件を通じて，自己重力系としての宇宙の諸条件の中に最終解答をさがす立場を読者に明示している。そしてさらにブラックホールなどの最近の天文学的展

開や素粒子に関する新しい発見にもふれながら，著者自身の提出した宇宙モデルについても述べて，本書を締めくくっている。参照した文献の広さと衒学的に陥らずバランスのとれた見識は，本書を極めて価値の高いものにしている。大学の教養を身につけた読者にとって，これは“時間の問題”に対する大変優れた案内書であるといえるだろう。

著者は極めて広い知識を活用して熱心に語りかけているが，多くの研究に対して公平になろうとしすぎているためか，もっと著者の意見だけを述べてほしいと思うところや，説明が長すぎてかえってわかりにくいところ，翻訳しにくいところもあったし，著者の立場には必ずしも同調できない箇所もあった。また明らかな間違いは断らずに訂正しておいたが，用語についていくらか独断的に訳したものもあり，これには原語を付記しておいた。

広大な宇宙に比べれば時間的にも無限小の点に近い人類の考える時間の概念がどれほどの意義を宇宙に対してもつかわからないが，少なくとも人間自身にとっては，それは決して小さくはないはずである。重力と宇宙の問題に一生をささげたアインシュタインの生誕百年祭を今年終えて，この無限に大きい問題にさらに取り組むことを喜びとする人智を読者と共に愛でたいと思うのである。

1979年4月

訳者を代表して
戸田盛和　記す

目　次

記号一覧

A	光源の面積	100
A	衝突減衰理論の中の定数	152
$\mathbf{A}$	電磁ベクトルポテンシャル	129
$\bar{\mathbf{A}}$	時間対称ポテンシャル	131
$\mathbf{A}_{\mathrm{ret}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{adv}}$	遅延ポテンシャルと先進ポテンシャル	131
A^{μ}	4元電磁ポテンシャル	127
$A_{ij;kl}$	μ 空間での遷移確率	68
$A_{ij;kl}$	量子的状態間の遷移確率	171
A_{nm}	純粋状態の密度行列要素	167
a	シュテファンの定数	94
a	荷電粒子の大きさ	131
$a_{ij\to kl}$	μ 空間での時間平均遷移数	68
a_n	状態 n の量子力学的振幅	164
$a_n^{(i)}$	集合中の状態 n の量子力学的振幅	167
$\mathbf{B}$	磁気誘導場(磁場)	26,127
B_1, B_2, B_3	磁場の成分	127
C	運動論の中の定数	43
c	光速	8,128
c	波の速さ	119
c_s	音速	113
D	重陽子	98,111
D_{F}	光子のファインマンのプロパゲーター	186
E	気体の内部エネルギー	32
E	粒子のエネルギー	183
$\mathbf{E}$	電場	127
E_1, E_2, E_3	電場の成分	127

ΔE ………… 定常状態間のエネルギー間隔　165

δE ………… エネルギー測定での古典的不確定　48,170

E_n ………… 量子的定常状態 n のエネルギー準位　164

e ………… 電荷　26,128

e^-, e^+ ………… 電子/陽電子　111,182

$\hat{e}$ ………… 偏光の単位ベクトル　129

e_i ………… 粒子 i の電荷　127

F ………… 力　38

$F^{\mu\nu}$ ………… 電磁場強度テンソル　127

$\bar{F}$ ………… 時間対称電磁場(テンソル指標なし)　131

F_{adv} ………… 先進電磁場(テンソル指標なし)　130

F_{in} ………… 入射電磁場(テンソル指標なし)　130

F_{out} ………… 外向電磁場(テンソル指標なし)　130

F_{rad} ………… 輻射電磁場(テンソル指標なし)　130

F_{ret} ………… 遅延電磁場(テンソル指標なし)　130

F_{tot} ………… 全電磁場(テンソル指標なし)　130

$F_{(i)adv}$ ………… 粒子 i の先進電磁場　134

$F_{(i)ret}$ ………… 粒子 i の遅延電磁場　134

F_{ext} ………… 荷電粒子への外力　132

f ………… 分布関数　37

f ………… 力　25

f^{μ} ………… 共変輻射減衰力　131

f_1, f_2, f_1', f_2' ………… $f(q, v_1, t)$, $f(q, v_2, t)$, $f(q, v_1', t)$, $f(q, v_2', t)$ のそれぞれの略号　40

f_{rad} ………… 輻射減衰力　130

G ………… 微視状態数　54

G ………… ニュートンの重力定数　86

G_ν ………… 量子的グループ ν の微視状態数　171

$g_{\mu\nu}$ ………… 計量テンソル　11,86

g_i ………… グループ i の固有状態数　171

H ………… ボルツマンの H 関数　43,170

H ………… ハッブル定数　93,193

H ………… ハミルトニアン　162

$\mathcal{H}$ ………… ハミルトニアン関数　45

$\bar{H}$ ………… 一般化 H 関数　52,171

$\bar{H}_1$, $\bar{H}_2$ ………… 時間 t_1, t_2 での $\bar{H}$ 関数　53

H_{nm} ………… ハミルトニアンの行列要素　164

H_{int} ………… 一定相互作用ハミルトニアンの行列要素(指標なし)　164

$\mathcal{H}_I$ ………… 相互作用ハミルトニアン密度演算子　186

He^3, He^4 ………… ヘリウム3とヘリウム4　98

$\hbar$ ………… プランク定数の $1/2\pi$　8

$\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ ……… 時空の領域　12

ΔI ………… 情報増加量　55

$\mathcal{J}$ ………… 時空の領域　12

j^{μ} ………… 4元電流　127

j^{μ} ………… 電流演算子　186

K ………… 力の定数　82,133

K ………… 複素共役演算子　163

K^0 ………… 中性 K 中間子　182

k ………… ロバートソン－ウォーカー計量での曲率　19,87

k ………… ボルツマン定数　35

k ………… 1より小さい定数　122

$\mathbf{k}$ ………… 屈折率の虚数部　142

L ………… 光度　100,136

L ………… ラグランジュアン　144

$\boldsymbol{L}$ ………… ブラックホールの角運動量　105

$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ ……… 光円錐　13

$\mathcal{L}$ ………… ラプラス変換　165

$\mathcal{L}$ ………… ラグランジュアン密度演算子　186

L_i ………… 粒子 i のラグランジュアン　148

l ………… プランク波長　106

M ………… 力学量　46

M ………… 一般的観測量に対応する1次エルミート演算子　161

M ………… ブラックホール質量　105

$\mathcal{M}$ ………… 共運動体積の質量　87

$\bar{M}$ ………… M の集合平均　46

$\hat{M}$ ………… M の時間平均　49

M_{ir} ………… ブラックホールの非減少質量　105

M_{mn} ………… 一般エルミート演算子の行列要素　167

m ………… 粒子質量　25,82

m ………… 陽子質量　202

m_i ………… 粒子 i の質量　128

m_0 ………… 粒子の静止質量　183

N ………… 気体の粒子数　35

N ………… 格子粒子数　82

N ………… 量子状態数　165

N ………… 宇宙の中の粒子数　203

$\mathcal{N}$ ………… 集合の構成数　46,167

n ………… 中性子　111

$\boldsymbol{n}$ ………… 源からの電磁波動伝播単位ベクトル　129

$\mathbf{n}$ ………… 屈折率　142

n_i ………… 化学的凝縮度　34,195

n_i ………… μ 空間での細胞 i を占める粒子数　52,66

n_i ………… 量子状態グループ i を占める粒子数　171

n_0 ………… 屈折率の実数部　142

P ………… ダイソンの時間的順序付け演算子　185

P_ν ………… 量子状態グループ ν での全存在確率　171

p ………… 気体圧力　32

p ………… $(p_1, \cdots, p_{3N})$ の略号　46

p ………… 宇宙流体圧力　87

p ………… 陽子　98

$\boldsymbol{p}$ ………… 運動量ベクトル（$\{p_1, p_2, p_3\}$ の略号）　37,183

d^3p ………… $dp_1 dp_2 dp_3$ の略号　37

p^μ ………… 4 元運動量ベクトル　183

p_i ………… 運動量空間の座標　37

Q ………… 熱量　32

q ………… (q_1, q_2, q_3) の略号　46

q ………… 減速パラメタ　91

$\boldsymbol{q}$ ………… 位置ベクトル（$\{q_1, q_2, q_3\}$ の略号）　37

d^3q ………… $dq_1 dq_2 dq_3$ の略号　37

q_i ………… 位置座標　37

R ………… ロバートソン－ウォーカー計量でのスケール因子　19,87

$R=|\boldsymbol{R}|$ ………… 121,129

$\boldsymbol{R}$ ………… 波動の源からの伝播ベクトル　121,129

ΔR ………… スケール因子 R の変化　113

$\mathcal{R}_{\mu\nu}$, $\mathcal{R}$ ………… 一般相対論の場の方程式のテンソルとスカラー　86

$R_{\rm ext}$, $R_{\rm int}$ ………… 吸収体球殻の外径と内径　138

r ………… ロバートソン－ウォーカー計量での径座標　19,87

r ………… 遠方銀河への径距離　92

r ………… 星が存在する球殻の半径　99

r ………… 吸収空洞の中心からの距離　142

$\boldsymbol{r}$ ………… 空間での位置ベクトル　25,119

$\boldsymbol{r}'$ ………… 波動の源の位置ベクトル　120

r_0 ………… 有限ユークリッド宇宙での星の最大可視距離　100

$\boldsymbol{r}_{ij}$ ………… 粒子 i と粒子 j との相対位置ベクトル　145

S ………… エントロピー；細分割エントロピー　33,169

S, dS ………… 体積を囲む面とその微小要素　121

S, $S_{\rm pn}$ ………… 量子的変換演算子とその要素　168

S ………… 散乱行列　185

$\mathcal{S}$ ………… 作用　128

ΔS ………… エントロピー変化　34,55,76

S_A^1, S_A^2, S_B^1, S_B^2　それぞれに系 A と系 B の時間 1 と 2 におけるエントロピー　76

$S_{\max}$ ………… 極大エントロピー　65,73

$S_{\rm bh}$ ………… ブラックホール“エントロピー”$(=\sigma)$ 106
$S_{\rm ext}$ ………… ブラックホール領域の通常のエントロピー 106
$S_{\rm T}$ ………… ブラックホール領域の全エントロピー 106
s^2, ds^2 ……… 時空距離 11
s ………… ラプラス変換パラメタ 165
T ………… 温度 32
T ………… 長い時間間隔 49
T ………… 時間反転 162
$T_{\mu\nu}$ ………… ストレス エネルギー 運動量テンソル 86
T_γ ………… 電磁輻射の温度 94
$T_{\rm m}$ ………… 物質の温度 95
$T_{\rm i}$ ………… イオンの温度 152,192
t ………… 宇宙時間 20
t ………… ニュートン時間 24
U ………… ユニタリ変換演算子 161
U, U_{ml}, U_{nl}, U_{nk} 展開演算子とその行列要素 163,172
$U_0=|\boldsymbol{U}_0|$ …… 141
$\boldsymbol{U}_0$ ………… 振動荷電粒子の速度ベクトル 141
$\boldsymbol{u}$ ………… μ 空間での“速度”ベクトル 38
V ………… 気体の容積 33
V ………… ユークリッド空間の容積 121
V ………… 粒子間ポテンシャル 144
v ………… 基準系の x^1 方向への速度 12
v ………… 荷電粒子の速さ 26
v ………… 遠方銀河の後退速さ 92
$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_1'$ 粒子の速度 38,40
$\boldsymbol{v}$ ………… Γ 空間での“速度”ベクトル 47
$\boldsymbol{v}$ ………… 荷電粒子の速度 129
$\boldsymbol{v}_0$ ………… 気体の全体的速度 43
$\boldsymbol{v}_{(i)}$ ………… 粒子 i の速度 128
W ………… なされた仕事 32
$W(\Lambda)$ ………… Γ 空間のスター Λ の体積 52
w ………… 遷移確率 163
$w_{\rm rev}$ ………… 時間反転過程の遷移確率 163
x ………… (x^0, x^1, x^2, x^3) の略号 11
x^μ, $\bar{x}^\mu$ ……… 時空点の座標 11,12
Δx^0, $\Delta\bar{x}^0$ …… 時間間隔 18
$x^\mu_{(i)}$ ………… 粒子 i の4元位置ベクトル 127
Z^{ij}_{kl} ………… 量子状態間の時間平均遷移数 171
z^μ, $z^\mu_{(i)}$ ……… 粒子世界線のパラメタ座標と粒子 i のもの 127,128
$\dot{z}^\mu_{(i)}$ ………… 粒子 i の4元速度 127,128

α	正の定数	27
α	比熱比	96
α, β, γ	量子力学的観測量	174,161,176
α	量子統計の指標	171
β	マクスウェル分布の定数	39,43
β	ベータ線	98
γ	ガンマ線	98,111
$\boldsymbol{\gamma}$	ベクトル関数	25
δ	ディラックのデルタ関数	120
δ^4	ディラックの4次元デルタ関数	127
δ_{nm}	クロネッカーのデルタ	170
ϵ	時間の微小間隔	62
ϵ	荷電粒子の緩和時間	132
ϵ	定常状態のまわりの狭いエネルギー幅	165
ε	宇宙流体密度	87,196
$\Delta\varepsilon$	宇宙流体密度の乱れ	113
ε_γ	電磁輻射のエネルギー密度	89,136,194
ε_{m}	物質のエネルギー密度	89
η	フリードマンのモデルの関数形パラメタ	88,113
η	エネルギーの量子的不確定	169
$\eta_{\mu\nu}$	ミンコーフスキー計量テンソル	12,128
$\boldsymbol{\Theta}$	ベクトル $\boldsymbol{U}_0$ からの極座標角	129,141
$\boldsymbol{\Theta}$	時間反転の反ユニタリ演算子	163
θ	ベクトル $\boldsymbol{n}$ からの角変位	141
κ	相対論的補正因子 $(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})$	129
$\Lambda, \Lambda_0, \Lambda_1$	Γ 空間でのスター	52,69
$\boldsymbol{\Lambda}$	ブラックホールのエネルギー関連量	106
λ	電磁波の波長	94
λ_i	粒子 i の世界線に沿うパラメタ	127
μ, ν	テンソル指標	11
μ^+, μ^-	ミュー中間子	182
ν	イオンの実効衝突周波数	153
$\nu_e, \bar{\nu}_e$	電子に伴うニュートリノと反ニュートリノ	111,182
$\bar{\nu}_\mu$	ミュー中間子に伴う反ニュートリノ	182
Π	ブラックホールの“温度”	106
π^+, π^-	パイ中間子	182
P	Γ 空間での粗分割密度	52
P	粗分割統計演算子	172
P_n	スター $\boldsymbol{n}$ の粗分割密度	69
P_{nn}	粗分割密度行列要素	172
ρ	Γ 空間での点密度	46

ρ	…………	空間での星密度　100
ρ	…………	スカラー波源密度　119
ρ	…………	吸収荷電粒子密度　142
ρ	…………	一般的吸収体密度　151
ρ	…………	陽子密度　202
$\hat{\rho}$	…………	統計的演算子　167
ρ_γ	…………	光子密度　95,202
ρ_i	…………	イオン密度　152
$\hat{\rho}_{nm}$	…………	密度行列要素　167
$\hat{\rho}_{nm}^{(i)}$, $\hat{\rho}_{nm}^{(2)}$	…………	最初と2番目の測定過程に対する密度行列要素　175
σ	…………	粒子散乱断面積　40
σ	…………	細分割 H 関数　51,169
σ	…………	ブラックホールの“エントロピー”　106
σ	…………	吸収断面積　151
σ	…………	逆制動輻射断面積　152,192
$\boldsymbol{\sigma}$	…………	スピン ベクトル　162
σ'	…………	粒子逆散乱断面積　41
σ_T	…………	トムソン散乱断面積　154
τ_i	…………	粒子 i の固有時間　127
Φ_n	…………	状態 i にある測定器の固有関数　177
ϕ	…………	スカラー波の振幅　119
ϕ	…………	電磁スカラー ポテンシャル　129
ϕ	…………	ベクトル $\boldsymbol{U}_0$ からの変位角　141,142
ϕ, ϕ'	…………	量子的状態ベクトル　161
ϕ_{ret}, ϕ_{adv}	…………	遅延と先進スカラー波の振幅　120
ψ_1, ψ_2, ψ_3, $\bar{\psi}_2$		気体の状態　61
ψ, ψ'	…………	量子的状態ベクトル　161
Ω	…………	ロバートソン－ウォーカー計量での角座標　20,87
Ω	…………	粒子散乱の角座標　40
Ω	…………	吸収空洞での角座標　142
Ω_A, Ω_B	…………	Γ 空間での領域　60
Ω, Ω'	…………	Γ 空間類似の領域　107
ω	…………	電磁輻射の角周波数　94,141
ω	…………	振動荷電粒子の角周波数　141
ω_p	…………	プラズマ振動数　153
$\nabla_6\cdot$	…………	μ 空間での $\nabla\cdot$ (発散)　38
$\nabla_{6N}\cdot$	…………	Γ 空間での $\nabla\cdot$ (発散)　47
∇_q	…………	位置ベクトルへの ∇ (勾配演算子)　38
∇_v	…………	速度ベクトルへの ∇ (勾配演算子)　38
∇^2	…………	ラプラシアン　119
$\Box^2$	…………	ダランベルシャン　127

0
はじめに

物理学の基礎法則は時間の過去と未来について対称的である。では，過去と未来の相違はどのように説明したらよいのだろうか。基礎物理学のどの部門もどこかで必ずこの問題に直面せざるをえない。しかし，1世紀以上にわたって，偉大な物理学者達の思索の対象となったにもかかわらず，この問題は現在でも解決にほど遠いように思われる。そして，日常経験されるこのような基本的概念に対する説明が，ボルツマン，アインシュタイン，シュレーディンガー，エディントン，エーレンフェストのような人々の思索の後にも，なお不明瞭でパラドックス的であるというのは確かに異常なことである。しかも物理学者に加え，アリストテレス，聖アウグスティヌス，カントなどの哲学者もまた何世紀にもわたって時間の本性の問題に関心をはらってきたのである。

この問題に関する手近な文献に目を通すと，そこに大きな混乱と誤解があるという印象を受けるだろう。たしかにこれまで，時間非対称(time asymmetry)の物理学はよく定義された単一の問題としてではなく，ほとんどすべての物理学の分野で，実際の世界と矛盾しないような境界条件を選ぶときに生じる整合性の問題として現われていたのである。そのため，この20世紀物理学のいろいろな分野に共通であるべき問題に対して，多くの研究者がさまざまな異なる見地から近づき，ほとんど共通点のない説明方法や用語を用いてきたのである。

この本の第一の目的は，本来本質的に関係しているこれらの研究を集め，一様な用語と注意深い定義とを用いて一つの対象にまとめ上げることであ

る。これだけですでに誤解の中の多くのものは取り除かれる。さらに一見無関係あるいは矛盾に思われる議論も，首尾一貫した正確な理論の相補的な面であることが示される。これはこの問題の物理学的性質と哲学的性質とをはっきり区別することによってはじめて達成されるのである。実際，時間非対称に関する混乱の非常に多くのものは，何が実際に議論されているのかを正確に認識していないことから生じている。たとえば，そこで問題になっているのはこの非対称性の**性質**か，それともその**原因**なのかといったことである。しかもすべての問題を言語や心理のような主観的な概念に変形してみる試みさえある[1]。これに対し，本書では現実の世界に強く根をおろして，時間非対称は日常の生活で観察される現象であり，その明確な説明が待たれているという立場から考察していく。

歴史的にいえば，物理学者は時間というものを"常に流れている"何かで，宇宙の内容を乗せたまま，過去から未来へといやおうなしに移っていく，すべてに共通な運動として考えてきた。ニュートンによって最初に物理学の法則の数学的パラメタとして導入されて以来，時間の一様性やその前方への流れの正確さが強調されてきた。ニュートン的時間は絶対的，かつ普遍的で，標準的な時計はどこにあっても，どのような運動をしていても，それに関係なく皆同じ進度で動くと考えられている。これは今日でもなお日常茶飯事としての時間の概念でもある。

"移り行く流れ"という考えに平行して，束の間的構造に対する根強い信念も存在し，これを否定できる人は少ないであろう。これは**動いていく現在の瞬間**の存在である。人間は今(now)を強く意識し，この今が過去から未来へ向けて定常的に前進し移っていくということはもちろん否定できない。実際，"過去"と"未来"の意味自身，この経験によって心理的に定められたものである。特殊相対論より以前には，ただ一つの瞬間(今)だけが宇宙に存在し，**その**過去は存在から過ぎ去って出ていった世界であり，**その**未来はこれから存在になる世界であるという考えが受け入れやすかった。

特殊相対論の登場は絶対的で一様な時間や普遍的な今という概念のすべてを打ちくだいた。時間はそれ自身が新しい構造，すなわち4次元の**時空**(spase-time)の一部になったのである。この新しい構造では，空間の間隔は常に時間の間隔と結び付いているので，二つの場所における"同時"という概念は絶対的な意味をもたない。新しい4次元世界の像においては，一つの体系の過去と未来とは一緒の存在として考えなければならない。

相対論以前の物理学の誤りは，時間を余りにも人間の体験と密着させた点にある。しかし相対論は人間の体験と矛盾すると考えてはいけない。“普遍的な今”というおごった概念は，もっと慎み深い“ここで今”いいかえれば**事象**(event)で置き換えられたのである。これは時間の瞬間と空間の点とを合わせもっている。しかしなお，我々の個人的な“今”は時空内の世界線上を点のように動く意識として許される。この点はある人の座標系内ではおそらく一様に動くであろうが，他の人には通用せず，絶対的な意味をもたない。このように相対論的物理学は動いていく現在という概念を，宇宙の超構造から追い出して，人間の心の中に属するものとしたのである。ある人達はこれをもって我々が意識する今という概念を純粋な幻想，つまり物理学よりも心理学の領域の問題としようとした。また他の人達は，我々すべての体験の中でおそらく最も基本的な，この概念の物理的な実在性を棄て去りたがらない。それにもかかわらず，またこのことは物理学者に対して充分強調されていないようであるが，現在の物理学は流れる時間あるいは動いている現在の瞬間について何も決め手をもっていないのである。したがって，このような概念を残したいと思う人は，実験室では現われないような方法で心自身が物理現象に関与していると，仮定せざるをえない。しかし，この提案は科学の世界ではすなおに受け入れられるものではない。時間に関する情報の取得は二つのレベルで起こるとエディントンは書いている。すなわち，それは実験室の物理学と同様の方法で感覚器官によって取得され，これに加えて我々自身の心の“裏口”を通しても取得される[2]。時間が“動く”というふつうの考えはこの後者に由来するものである。

心に関する適当な理論が物理学にはないから，物理学的な時間を議論するときは，今ということと時間の見かけ上の流れとに対する考察を必然的に避けなければならないはずである。なぜなら，これらは現在理解しているようなふつうの時空においては意味のない概念だからである。このことは最近の哲学者にはよく知られている。しかし，多くの物理学者は物理学の**受動的**な時空の概念の中へ，心理学の**能動的**な時間を持ち込もうとしてきた。物理学においては**時間の向き**とか**時間の矢**に言及するのがほとんどあたりまえで，これは“今”ということの過去から未来への流れ，あるいは動きの向きを意味するものととられている。おそらく，すべての最も重大な誤解はここから発生している。というのは，“なっていく”(becoming)という不鮮明な心理学的概念が，時間**非対称**という客観的で合理的な物理学的概念とごちゃ混ぜ

にされることが大変多いからである。

時間の二つの向き，すなわち過去へ**向けて**のと未来へ**向けて**の向きは，ふつうの体験から見て物理的に基本的な区別がされなければならない。この事実は“今”ということの存在や運動と全く無関係である。たとえば我々は過去を**記憶する**が未来については未知である。さらに時間の二つの配向に関するこの**非対称性**は実験室の物理学においても直ちに認められる。実際，すべての自然現象は時間に対して非対称であるように見える。この普遍的な非対称性のため，これは**時間自身**の構造的な特性であるという誤解が付け加えられてしまったのである。詳しく考察すれば，この非対称性は時(-空)間**内の物理体系の集団的性質**と考えたほうが適当であることがわかる。この意味で，このようなものとしての時間は**内在的**な配向，非対称性，運動，向き，矢をもつものではない。空虚な宇宙ではこのようなものは存在しない。ここでいう時間非対称とは，世界の内容が過去と未来とに向かって構造的区別をもっている，という自然の基礎的な事実を意味する。

時間非対称についての先駆的な仕事はボルツマンによってなされた。彼は気体の分子的モデルに対して力学の法則を統計的仮定とともに適用した。非対称性についての重要な内容が孤立系におけるエントロピーの増大に関する有名な H 定理に含まれている。この定理の解釈は，エーレンフェスト夫妻の注意深い研究までの長い間，論争の種であった。特に，ロシュミットとツェルメロによる可逆性の反論は，ボルツマンが個々の分子に適用した時間に対して可逆な力学法則と実験的な熱力学との間の矛盾を指摘したものであった。このパラドックスの解消によって明らかにされたのは，H 定理だけでは熱力学的体系で観測される非対称性を説明できず，さらに実際の体系が最初つくられた方法に関する明白な非対称性の仮定を必要とするということであった。この点に関する非常に明解な説明は，死後の 1956 年に発行されたライヘンバッハの本にのっている。彼はある大きな環境から低いエントロピー状態に切り離された**分枝系**という概念を用いている。

可逆な力学法則とありふれた熱力学的過程の時間非対称との統一的解釈が成功してから長年経ったにもかかわらず，時間非対称に関するなじみにくい説明を支持するために，可逆性の反論はいままで折にふれてはむしかえされてきた。ボルツマン－エーレンフェスト－ライヘンバッハの説明方法が最近の物理学者には一般的に認められていなかったということに注意しよう。明らかに，その理由の一つは H 定理がしばしば拡大解釈されていた事実によ

るものである。すなわち，H 定理は巨視的な人間によって**実際観測されること**の説明であって，それとは独立に存在する特別な性質の理論的記述をめざすものでは**ない**。広く信じられているのとは逆に，時間非対称は物理学者の巨視的な観点に適応した**記述の型**にすぎないもので，力学の法則に追加される**物理学的な**内容ではない。無秩序の増大の記述以上の何物かが時間非対称にある，という後者の考え方はおそらく時間が能動的に見えることによるものであろう。この観点に立つ者は，しばしば H 定理によって記述される非対称性は主観的で“現実”ではないといって反対する。それはこの非対称性が，たとえば個々の原子の間の複雑な関連を無視する近似，すなわち粗分割(coarse graining)によって自然を近似的に記述するために物理体系に対する情報がいくらか失われることに由来する，という考えである。もちろん，これは本当である。しかし個々の原子が時間非対称を体験すると考えなければならないようなことは，いままでに自然界に発見されていない。非対称性の本質は複雑な体系の集団的性質であって，生命自身もそのようなものである。H 定理による非対称性の記述が“主観的”かどうかは哲学の問題であっても，物理学の問題ではない。実際，**要求されることのすべて**は現実の世界に対する観察の説明に成功することである。

個々の粒子を含めてすべての物に自然が時間の向き(動いている時間という意味)を与えているという誤った信念は，多くの著者にこの不思議な“別の添加物”の源を探させた[3]。ある人々は微視的領域の問題として量子力学の対象に[4]，他の人達は宇宙論[5]，あるいは宇宙論と電磁力学のからみ合いの中[6]にこれを求めた。また，ある人達は外部の世界と不規則な相互作用をするような体系を考え[7]，ハミルトニアン的記述を否定，あるいは一部否定することを試みた[3]。このような試みの複雑さ不明確さは，求めようとした追加的性質が実は存在しないことを強く示唆している。

熱力学や統計力学におけるこのような議論と平行して，電磁力学の遅延輻射に対する境界条件に関しての論争が長い間行なわれた。すでに1909年には，遅延が熱力学の第2法則にとって必要な前提であるか，それとも逆であるかをめぐってアインシュタインとリッツの不一致があった。波動には確かに熱力学とは別の非対称性があることがポッパーによって注意された。詳しい数学的理論に立って，遅延輻射の先進輻射に対する優勢を的確に与えたのは，1945年にウィーラーとファインマンによってなされたものだけである。これは，いわゆる“吸収体理論”であって，輻射を結局は吸収する物体の熱

力学的性質が遅延性の説明に用いられている。この理論は最近ある宇宙論学者によって擁護された。この場合，吸収体に対する熱力学的考察を宇宙論的なもので置き換え，遅延輻射の局所的観測に基づいて宇宙モデルを区別するという面白い可能性も開かれた。不幸なことに，これらのモデルにおける熱力学の現状は非常に不明確で，発表された文献の多くは混乱を含み，また不必要に複雑な物質を仮定している。

宇宙論が熱力学や電磁力学の時間非対称を定めていると考える学派は，これらの関連の深さや順序に対する意見に広がりがあるものの，この10年間で大きく成長した。いまや古典的になった論文の中で，T. ゴールドは宇宙の膨張がある仕方で世界の熱力学的非平衡状態を**保持**しているのであって，収縮宇宙では変化は逆になるであろうと述べている。これは熱力学を宇宙論に適用して，宇宙の膨張と収縮のサイクルの繰り返しは一般に宇宙物質のエントロピーの増大をまねくだけであると述べた1930年代のトールマンの先駆的仕事と相反するものである。とにかく，一般的にいって宇宙膨張はその時間尺度が過程の緩和時間と同程度であるときにのみ局所的な熱力学的過程と関連するものであろう。いわゆる“ビッグバン”(big bang. 初期大爆発)の宇宙モデルの初期の段階はまさにこの場合である。宇宙の現在の非平衡の説明がさかのぼらなければならないのは，このビッグバンに向かってである。

トールマンの寄与の重要さは，宇宙にとって**重力**は負のエントロピーの最終的でかつ尽きることない貯水槽を供給し，このために時間非対称の問題の基礎にあるということの発見であった。重力が熱力学と関連していることが，重力崩壊の問題の中でようやくこの数年の間に再発見されたということは奇妙なことである。いまや有名なブラックホールが時間非対称に対する独特な商標をもつにいたった。

我々は量子力学も考察しなければならない。ノイマンの仕事以来，量子体系に対して行なわれた観測は二つの量子体系のふつうの相互作用と本質的に異なった性質をもつことがよく知られている。観測の間には非可逆的な変化があり，これは時間に関する一つの非対称性を与える。この非対称性を観測機器，あるいは進んで全宇宙の熱力学的性質と結び付ける試みの歴史は長く，複雑である。

最近，中性K中間子とよばれる素粒子が時間反転の対称性を破っているという発見があって，我々の問題は思いがけない新しい方向へ転換を余儀なくさせられた。境界条件としてよりも**相互作用**の結果として，時間に関して非

対称に振る舞う物理体系がはじめて発見されたのである。

本書ではこれらすべてのトピックスを通じて体系的に読者を案内するつもりである。もちろん一つの本で互いに相反する種々の観点のすべてを詳しく紹介することは不可能である。そのかわり，ここでは首尾一貫した概括的な像をつくりだす点に力をいれた。各段階で，異なった理論や解釈に対する参考文献をあげておいた。主題の多くは宇宙論的な内容で展開されるが，これは最近，最も興味深い分野だからである。

第1章では議論されるべき主題を詳しく説明し，適当な用語，定義，哲学的地盤を注意深く展開する。マクスウェルとボルツマンの標準的仕事は，分子運動論から H 定理まで，第2章でたどることにする。第3章は可逆性の反論とその解決をライヘンバッハの分枝体系の概念を用いて詳しく論じることにあてられる。第4章は最近の宇宙論の初等的な導入，オルバースのパラドックス，宇宙膨張の簡単な説明ではじめる。つづいて熱力学における重力の役割を論じ，これと平行して現在の宇宙の非平衡を理解するため，宇宙最初の大爆発で起こる種々の素粒子の重要な役割を説明する。第5章では波動，電磁力学における遅延の問題を扱う。吸収体理論に大きな注意を向け，“吸収体要請”を満たす種々の宇宙モデルを含めてやや詳しく説明する。第6章は量子論にあてる。統計力学の量子力学的取り扱い，そして思索的にならざるをえないが測定論に対する考察，またタキオン，K中間子についても簡単にふれる。最後の章はさらに思索的性質のもので，いわゆる宇宙の熱死やこれを避けようとする多くの宇宙論学者の試みに対する推論である。閉じた時間のもたらすものもここに含まれている。

この著作を終えるにあたって筆者は，時間非対称に関する多くの相異なる観点に対する合理的で確かな説明が，矛盾なく収められたと思う。そしてこの問題に対する現存の文献がしばしば落ち入る矛盾やパラドックスに落ち入らなかったと思う。これは実際の現象の理解だけに注意を限定し，非対称性の“主観性”のような本質的に哲学的な問題への逸脱を避けているのである。もちろん，説明にはギャップや不充分さがあり，さらに重大なのは，数学的な意味での完全な厳密さが意図されていないことである。しかし，時間非対称の本質に対する理解の骨組みは明確に与えられているし，将来詳しく考察されても，定性的には何も新しいものを必要としないと思う。

非対称性の**起源**を有意義につきとめられたかどうかは微妙な点である。しかし，この後の記述からわかることは，宇宙の**始まり**(ビッグバンの意味で)

という事件は，二つの境界条件，すなわち重力によって定まる広範囲な力学的運動に対する境界条件と，電磁気的や弱いおよび強い相互作用で定まる宇宙物質の微粒子運動に対する境界条件との不整合があった時間的先端として考えられる。いいかえれば，そこでは宇宙の大きな尺度と小さな尺度の運動の間に相関はないのである。この場合，宇宙物質の圧倒的に多くの初期条件の下でエントロピーは増大するだろう。したがってこの不整合は世界の時間非対称の終局的な起源と考えてよいだろう。そして，いつまでも膨張するビッグバンのモデルでは，この不整合は，たとえば陽子の質量のように，単なる自然の事実として受け取られるだろう。始めのない，あるいは(“始め”と“終わり”の)**二つの**時間的末端をもつ宇宙モデルでは，これはそれほど満足に受け入れられることではない。たとえば，一つの特異状態から半生涯の間は膨張し，それから対称的に収縮して終末の特異状態へ移行するフリードマンの閉じた宇宙モデルを考えてみよう。明らかにこの場合は，一方の末端に他方よりも優先して不整合な境界条件を加えなければならない理由は存在しない。この理由により，微視的な境界条件は非常に特別な部分集合に限定され，その結果二つの特異状態の間に全般的な時間非対称が成り立つと仮定したくなる。この観点が時間非対称に対する説明になっているか，それとも単なる記述に終わっているかということは哲学者にまかせたいところである。

最後に，要求される予備知識について述べよう。第1章ではローレンツ変換と固有時間に関する簡単な説明を与え，また第5章ではマクスウェル－ローレンツの理論を概観するが，読者に特殊相対論と電磁力学とを理解できる知識があると都合がよい。たとえば $x_\mu = g_{\nu\mu}x^\nu$ のように添字を上あるいは下につけて反変および共変テンソルを表わすことの知識を仮定する。繰り返された添字については，加えるという慣用を全巻で用いた。ギリシア文字だけがテンソルの指標に，ラテン文字は粒子の指標に，という風にしてある。熱力学と統計力学の知識はほとんど前提とせず，標準的な定理は必要に応じて説明した。一般相対論は最小限にとどめ，宇宙論的な議論の多くはふつうの言葉や定義で充分な共通運動座標系の局所的近傍に帰着させて論じた。第6章のはじめの節ではある程度量子力学の理解を必要とするが，量子統計力学と測定論の議論はこれらに対する初等的知識だけで充分である。

特に述べた場合を除き，プランク定数，光速度がともに1になる単位系($\hbar = c = 1$)を用いた。電磁力学ではガウス単位系を用いた。記号は vii～xvi ページに表示した。

参考文献は各章末にあげた。これに加えて，より進んだ読書あるいは基本的な読書のための出版物もあげた。これらは解説，一般的な興味ある著書，それから文献としてあげなかった論文でその章の特別なトピックと関係のある論文も含めておいた。

参 考 文 献

1. たとえば，R. M. Lewis: Science **71** (1930) 568 では "エントロピーの増加…は主観的概念"。　H. D. Zeh: "On the irreversibility of time and observation in quantum mechanics" *Foundations of Quantum Mechanics*, ed. B. D'Espagnat (Academic Press, New York and London, 1971) には "古典統計力学における非可逆運動方程式の解釈は「主観的」"。
2. A. S. Eddington: *The Nature of the Physical World* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1929) chap. 5.
3. J. Mehra and E. C. G. Sudarshan: Nuovo Cimento **11 B** (1972) 215.
4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Statistical* Physics, 2nd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1968) p. 31.　M. Born: *Natural Philosophy of Cause and Chance* (Clarendon Press, Oxford, 1949) p. 113.
5. T. Gold: Amer. J. Phys. **30** (1962) 403.
6. F. Hoyle and J. V. Narlikar: Proc. Roy. Soc. (A) **270** (1962) 334.　T. Gold (ed.): "Time-symmetric electrodynamics and cosmology" *The Nature of Time* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1967).
7. J. M. Blatt: Prog. Theor. Phys. **22** (1959) 745.

1
時間とは何か

1.1 第4次元としての時間

我々の経験する物理的世界は4次元である。そのうちの1次元は他の次元と性質が異なっており，**時間**と名づけられる。そして他の3次元は**空間**と名づけられ，全体としての4次元構造は時空とよばれる。時空は，数学的には微分可能な**多様体**とか連続体によって記述され，そこでは，事象と名づけられるすべての点が，x^μ という4個の独立量または座標によって表示される $(\mu=0, 1, 2, 3)$。

多様体上での距離とか間隔は，次のようにその**計量構造**によって表現できる。すなわち，隣接する2点 x^μ と $x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$ の間隔は，線素または計量の形で

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{1.1}$$

と書かれる。ここでテンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は**計量テンソル**と名づけられ，4次元位置座標 x^μ だけの関数である。(1.1)で記述される形式の幾何は，リーマン幾何として知られている。

$g_{\mu\nu}$ の正確な形，すなわち多様体の幾何は，アインシュタインの一般相対論によると(4.2節を参照)，点 x^μ の近傍での**重力的性質**によって定まるものである。この幾何はふつうには極めて複雑であるが，ある条件の下では計量はかなり簡単に表現できる。たとえば，重力を無視できるような時空の小さな部分領域では，多様体は近似的に**平坦**であると考えてよい。そのときには，(1.1)の計量はミンコーフスキー計量とよばれる次のような簡単な形の写像で表わせる：

$$ds^2 = +(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.2}$$

これは，次の計量テンソルに対応するものである：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

式(1.2)と(1.3)では，4個の座標のうち一つには正符号がついていて他と異なり，この特別の座標 x^0 が時間であり，$(x^1 x^2 x^3)$ が空間である。この簡単な計量の2次形式を保存するような座標変換群はポアンカレ群とよばれるもので，これには移動や回転とともに，一様な相対運動をしている基準系(reference frame)の間の座標変換すなわち特殊相対論のいわゆるローレンツ変換も含まれている。たとえば，x^1 軸に沿ってだけ一様な速度 v の相対運動をしている系Iと系IIを考えよう。$\bar{x}^\mu$ で系IIの座標を表わすと，これと系Iの座標 x^μ との間に次の四つの関係式が成立する：

$$\bar{x}^0 = \frac{x^0 - vx^1}{(1-v^2)^{1/2}} \tag{1.4}$$

$$\bar{x}^1 = \frac{x^1 - vx^0}{(1-v^2)^{1/2}} \tag{1.5}$$

$$\bar{x}^2 = x^2 \tag{1.6}$$

$$\bar{x}^3 = x^3 \tag{1.7}$$

これらの式から直ちに，それぞれの間隔 $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ と $(\bar{x}^0)^2 - (\bar{x}^1)^2 - (\bar{x}^2)^2 - (\bar{x}^3)^2$ は等しいことがわかる。系IやIIのような基準系は，明らかに特別の系であり，特殊相対論では**慣性系**と名づけられている。さらに注意すべきことは，(1.2)の右辺は，正にも負にも，またゼロにもなることで，したがってそれは不定計量とよばれる。ds^2 が正，負，ゼロであるような2点は，それぞれ，時間的(timelike)，空間的(spacelike)，ゼロ(null)の距離にあるという。[これらの表現は，間隔 ds の時間成分もしくは空間成分のみが残るような基準系が存在することに由来する。] このようにしてあらゆるOのまわりの多様体は次の三つの異なる領域にわけられる(図1.1)。

(1) 点Oと時間的間隔によって結ばれるすべての点の組で表わされる領域 $\mathcal{I}+\mathcal{I}'$

(2) 点Oと空間的間隔で結ばれるすべての点の組で表わされる領域 $\mathcal{G}$

(3) 点Oとは $ds=0$ の関係にある面で，光円錐(null cone)として知られている領域 $\mathcal{L}+\mathcal{L}'$(この名の由来は明らかであろう)

図1.1からわかるように，領域$\mathscr{I}+\mathscr{I}'$と領域$\mathscr{G}$とはトポロジーが基本的に異なっている。すなわち前者は，二つに分離した点の集合$\mathscr{I}$と$\mathscr{I}'$とから成っていて，光円錐をどこかで横切る線によってのみ$\mathscr{I}$と$\mathscr{I}'$とが結ばれる。

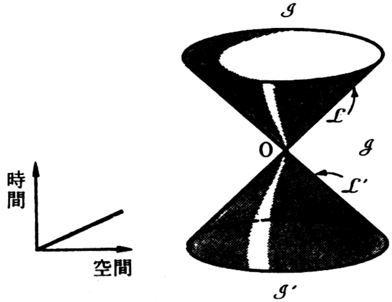


図 1.1　Oのまわりの多様体の領域　(空間次元の一つは描かれていない。)

さて，1点における時空のこのような区分は，それがローレンツ変換を行なっても保存されるということに意味がある。なぜなら，変換によって光円錐はそれ自身に，また$\mathscr{I}+\mathscr{L}$と$\mathscr{I}'+\mathscr{L}'$は別々に自分自身に写像されるので，光円錐とその内側の物理的性質は，図の上下の両半分で異なっているからである。そしてこのためにそれらは，Oの**絶対未来**と**絶対過去**と名づけられる。もちろんここでは，これら両半分の間に**構造的**な相違があるとはまだ考えていない。一つを“過去”他を“未来”とするのは単に便宜上のことであって，図1.1では上に向かってx^0の数値を大きくとることに対応している。この手続きは時間軸に物理的非対称を与えるのではなく，いわば1本の空間軸の座標値の増大方向を任意に決めるのと同じことである。しかし，これに対し時間の物理的非対称性とはその絶対的特性についての意味である。

領域$\mathscr{I}+\mathscr{L}$の中の事象は，点Oより**後**(later)の事象であるといえる。なぜなら，この事象は他の基準系でも常にOの未来の中に見出される，すなわち，時間的間隔をもつ点の間の先・後関係(earlier-later)については，すべての観測者が一致するからである。他方，領域$\mathscr{G}$の中の事象は，ある系ではOより後であるのに，他の系ではOより先になりうる(図1.4)。したがって，空間的間隔をもつ事象の間の先・後関係は無意味である。

ところでこれから，**空間的超曲面**(または単に曲面)という重要な概念を用いて話を進めることがある。その場合，この超曲面は3次元で，その中では，すべての点は他の点と空間的間隔で隔てられている(図1.2)。空間的超曲面にどこでも直角に交わるような線は，**時間的線**と名づけられる。質量のあるすべての粒子は，時空の中で時間的線に沿って動くことがわかるが，これらの線は粒子の**世界線**として知られている。[空間的世界線をもつ粒子タキオンの可能性については6.5節で論じる。]

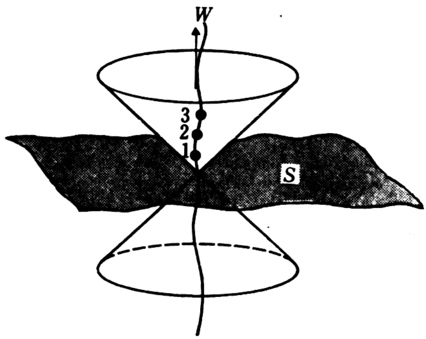


図 1.2　空間的面 S と時間的世界線 W　(W には順序系列の点が記されている。すべての観測者にとってこの順序は同じである。)

ミンコーフスキー空間での典型的な粒子の世界線は図1.2に描かれている。世界線は，1, 2, 3, …という点の系列によって記されているが，線の時間的特性から見て，これらは**時間的系列**(chronological sequence)とよばれる。各点は他の点と定まった過去・未来関係にあり，この関係はローレンツ変換の下で保存されるので，全体としての系列順序はすべての慣性系観測者にとって同じである。この関係は，世界線に接する時間的ベクトルを描くことによって便宜的に表現できる。もしベクトルが世界線に沿ってどちらかの方向へ動かされても，それはいつも同じ時間方向を指しているので，世界線の全体にわたって矛盾のない過去・未来関係を定義するのに用いることができる。便宜上，ベクトルが指す方向を“未来”とよぶことにする。他の世界線についてもこの手続きを繰り返すことによって，時空の全体にわたっての過去・未来の規約を確立することができる。

最後のところで述べたことは慣性系観測者にのみあてはまるものであるが，連続性の立場からわかるように，非慣性系観測者にも拡張できる。

1.2 ニュートン時間

図 1.1 と 1.2 において，光円錐は時間軸と 45° の角度に描かれているが，これは，多様体のすべての次元が同じ単位で測定されていることを表わしている。この場合，速度は無次元量である。ところが，日常経験の速度はかなり小さな数となるので，大きなスケール因子(光速)を時間測定に導入すると便利なことが多い。こうすると，光円錐は極めて広い角度に開くことになる。このような場合，近似的には光円錐の両半分が一致して時間軸に垂直な表裏二重の平面をなすと考えることができる。

もし，このような平面を一つずつ他の上に積み重ねたものを考えると，平面は世界線と交差する点の順序に従って時間的系列で標示されるだろう(図 1.3)。すべての観測者は同じ光円錐を見ているので，彼らは同じ標示の平面の列を見ている。そこで他の世界線もこの平面の列により，時間的系列に従って標示することができる。そのときこのような平面は，**同時平面**の役を果たしている。なぜなら，もし異なる世界線上のいくつかの点がある観測者にとって同じ平面上にあるなら，それはすべての観測者にとってもそうであるからである。そのときそれらの点は**同時**とよばれ，それらの平面は，すべての基準系に共通な，**絶対的**普遍時間を構成するのに用いられる。

数学的にはこの近似は，ローレンツ変換 L を，時間座標が空間座標に結ばれていない次のようなガリレイ変換に置き換えることに相当する：

$$\bar{x}^0 = x^0 \qquad \bar{x}^1 = x^1 - Ux^0 \qquad \cdots \tag{1.8}$$

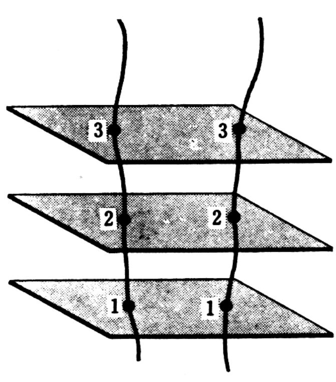


図 1.3 光円錐を外に開いてつくった同時性面（これが時間のニュートン的見方である。）

この場合には，時間と空間についての古いニュートン理論が復活する。相対論では，光円錐は質量ゼロの粒子(光子)の測地線として物理的に定義される。相対論以前では，光子の速度はガリレイ変換によって座標系に依存するものと思われていたが，実際には，光円錐の不変性によって，すべての座標系で光子の速度は同じである。

1.3 時計の進度と固有時間

1.1 節で，世界線に沿っての時間的順序づけについて述べたが，異なる慣性系上の事象系列の**隔たり**については何もふれなかった。この問題を論じるには，二つの時空座標系 I, II を同じ図上に描くと便利である。

図 1.4 では，系 I として，通常の直角座標を簡単化し空間を一つの x^1 軸だけで描いている。x^0 軸は，系 I の空間座標の原点に静止している点の世界線と考えることもできる。いま系 II が x^1 方向に一様な速度 v で動いていると仮定すると，$\bar{x}^0$ で表わされたこの系の時間軸は，系 I の中で一様な速度 v で動く粒子の世界線である。つぎに系 II の空間座標を考えよう。系 I の中の観測者は x^1 軸を彼の同時線と見なしている。そこでこれに対応する系 II の観測者にとっての同時線を図(図 1.4)上に見出すためには，次のような方法を用いるとよい。図 1.4 で $\bar{x}^0$ 軸に平行で等間隔な別の 2 本の世界線を考

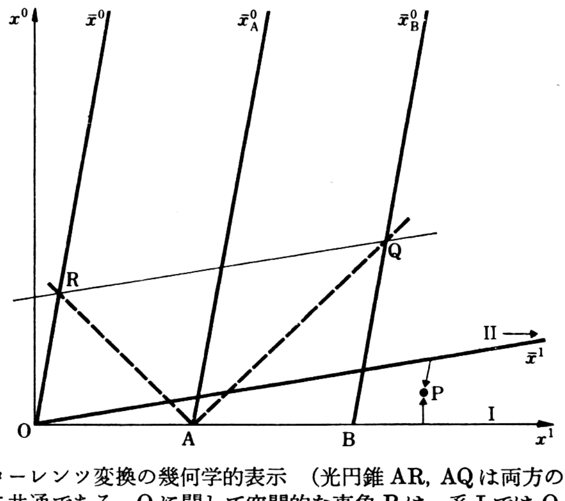


図 1.4　ローレンツ変換の幾何学的表示　(光円錐 AR, AQ は両方の系に共通である。O に関して空間的な事象 P は，系 I では O より後であるが，系 II では O より前であることに注意せよ。)

えて，それを $\bar{x}_A{}^0$ と $x_B{}^0$ と名づけよう。x^1 軸上の A 点での光円錐は，そのローレンツ不変から，両方の系にとって共通である。光円錐は世界線 $\bar{x}^0$ と $\bar{x}_B{}^0$ とそれぞれ点 R と Q とで交差している。そこで，系 II の観測者から見ると世界線 $\bar{x}^0$ と $\bar{x}_B{}^0$ とは，$\bar{x}_A{}^0$ から等距離にある静止粒子を表わしているので，事象 R と Q は同時と見なされる。したがって $\bar{x}^1$ 軸は，この同時線に平行に O を通るように描かれる。

こうして，系 I および II から見た二つの事象の時間間隔を比較することができるようになった。まず，**世界線に沿って測りながら**等間隔に点を組織的に記録してゆく装置が存在することに留意しよう。この装置を**時計**と名づける。時計の刻みは世界線に沿っての順序づけられた系列を定義する。もしある標準時計，すなわちあらかじめ定められた割合で正確に時を刻む時計がそれぞれの系に備えられているとすると，二つの刻みの間隔の比較，したがって時計の進度の比較を各系の観測から知ることができる。

この比較を定性的に理解するには，図 1.5 を参照するとよい。しかしこれを説明する前に，両方の系はここでも同じ図上に描かれてはいるが，その**ス**

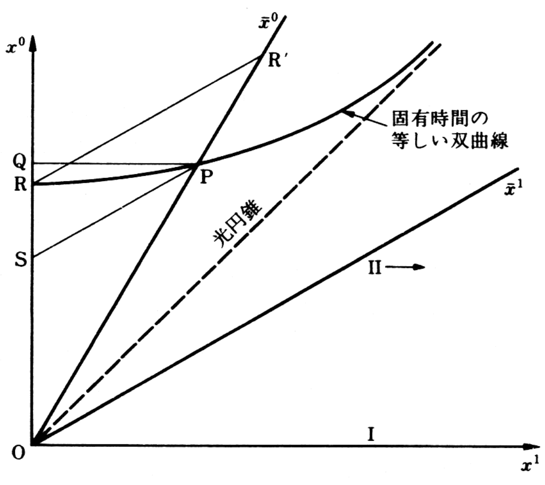


図 1.5 時間の遅れの効果（系 I と II の標準時計はそれぞれ R と P で時を刻む。系 II では R での刻みは R′ と同時，すなわち P での刻みより後であると認められるのに，系 I では P での刻みは Q と同時すなわち R での刻みより後であると認められる。各観測者は相手の時計がゆっくりと進んでいるように見える。）

ケール(尺度)はそれぞれの場合で異なっていることに注意しなければならない。まず，どんなに遠くでも光円錐に沿って測った距離 ds はゼロになるような不定計量を使っていることを思い起こそう。そこで，O を通る光円錐は両系の2軸を等分するが，系IIの2軸のほうがより光円錐に近づくように傾いているので，これらの軸に対する尺度がより大きいことになることがわかる。

この尺度を決めるためには，間隔 s は両系に共通であることに注意しよう。単位間隔 $s^2=1$ を選ぶと，ミンコーフスキー計量から $(x^0)^2-(x^1)^2=(\bar{x}^0)^2-(\bar{x}^1)^2=1$ が得られる。これは光円錐を漸近線とする双曲線の式で，図1.5にはそれも描いてある。系Iで単位間隔 $\overline{\mathrm{OR}}$ を示す標準時計は，したがって，系IIでは間隔 $\overline{\mathrm{OP}}$ を示すことになろう。

$\bar{x}^1$ 軸が傾いていることから，系IIの観測者はこの単位間隔の終端 P を x^0 世界線上の事象 S と同時であると認めることがわかるだろう。なぜなら，線 PS は系IIの同時線だからである。他方，系Iの観測者は事象 P は事象 Q と同時に起こったと認めるだろう。なぜなら，x^1 軸に平行な QP は**この**系Iでの同時線だからである。このようにして，両系の観測者は時計の一刻みの長さについて一致せず，したがって，時計の進度についても一致しないことになる。系Iの観測者には，IIの標準時計のほうがゆっくりと進んでいると見る。なぜなら，彼自身の標準時計が R を刻んでいるにもかかわらず，系IIの時計はそのときに後(later)の事象 Q を刻んでいるからである。しかしながら同様にして，系IIの観測者には系Iの標準時計のほうがゆっくりと進んでいるように見える。それは，彼自身の標準時計が P を刻んでいるにもかかわらず，系Iの時計はそのときに後の事象 R′ を刻んでいるからである。二つの系の間での，完全に相互的なこの効果は，**時間の遅れ**として知られている。ここで，時計の刻みのこの遅れは，単に各観測者が他の時計を見るために必要な光の有限な伝播時間(もちろん，それは許容されるが)によるものではないことに注意しなければならない。

実際の遅れの量はローレンツ変換(1.4)から直ちに見出され，系Iでの間隔 Δx^0 は系IIでは $\Delta\bar{x}^0$ として次のようになる：

$$\Delta\bar{x}^0=\frac{\Delta x^0}{(1-v^2)^{1/2}} \tag{1.9}$$

上の議論から，時間間隔という概念は極めてあいまいであることが明らかである。しかし，どんな運動状態に対しても，与えられた系について一義的

時間を定義することはできる。これはその系とともに運ばれている時計によって記録される時間であり，その系の**固有時間**とよばれる。そして我々がその系に対して静止している時にのみ，我々の固有時間はこの座標時間 x^0 と一致する。

1.4 宇宙時間

すでに計量(1.1)は，時空の小さな領域ではミンコーフスキー形式(1.2)にいつでも帰着できることを見たが，大きな尺度では重力を無視できないので，多様体は平坦であるとは期待できない。銀河系までの距離を越えるような大きな領域では，多様体の幾何は極めて複雑であると思われる。しかしさらに非常に大きな尺度，たとえば銀河系集団の大きさを越える程度になると，宇宙の大まかな性質は**一様**であることが天文学者によって一般的に認められている。このことから，宇宙の大きな尺度での局面を，かなり簡単な形の計量で表わすことができるようになる。

しかしこのような計量をつくるにあたっては，宇宙は**膨張しつつある**ように見えるので，銀河系の世界線は外に広がっている，という重要な事実を考慮しなければならない。ワイル(Weyl)[1]によって最初に示されたように，一様にならされた宇宙の中の物質分布は，過去の一共通点から発散して，互いに交差しない時間的世界線の束によって記述できる。そのとき，この世界線にいたるところで直交する空間的超曲面群が存在し，ある一つのパラメタで記述される。座標系としては，

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}=0$$

になるようにとってよい。このことは，この座標系に対して物質はいたるところで静止していることを意味し，したがって**座標と共に動く運動**(comoving. 以後は共運動と略記)として表わされる。超曲面の組はそれらを貫ぬく世界線の固有時間によって標示でき，そしてこれらの曲面は**すべて**の世界線と直交するので，この標示は普遍的または宇宙時間の一つとして役立つ。そしてこのような超曲面は明らかに，ニュートンの同時平面的性質と一部共通するものがある。

ある一つの宇宙時間の存在は，**宇宙原理**を使うともっと物理的に理解しやすい。この原理は，宇宙の大きな尺度での様相はすべての方向にすべての点で同じである。すなわち，宇宙は均質で等方であるというものである。この

ことから，時空の各点はそこでの観測者が等方的膨張を見るような，ある特定の速度をもつことになる。これが共運動系であって，この系に静止する観測者は，宇宙が膨張するにつれてたどる一連の宇宙の状態によって時間を標示する。すべての共運動観測者は一連の同じ状態を見るので，この時間は明らかに，多様体上のすべての点にとって共通のものとすることができる。ついでに，地球自身も共運動に極めて近いらしいということも付け加えておこう。

これらの対称性だけから，計量(1.1)は極座標(r, Ω)で次の簡単な形に書くことができる：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\frac{R^2(t)}{(1+\frac{1}{4}kr^2)^2}(\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2) \tag{1.10}$$

式(1.10)の右辺は，その発見者の名をとってロバートソン-ウォーカー(Robertson-Walker)[2]計量として知られている。ここで座標tは宇宙時間であり，Rはtだけの関数である。tが一定の3次元表面の計量は

$$\mathrm{d}s^2=-\frac{R^2(t)}{(1+\frac{1}{4}kr^2)^2}(\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2) \tag{1.11}$$

となり，$R(t)$は，任意の共運動点間の距離に対するスケール因子にすぎなくなる。もし$R(t)$をtの増加関数とするなら，$\mathrm{d}s^2$の大きさは時間とともに増大し，ロバートソン-ウォーカー計量は，**一様な**膨張状態にある宇宙を記述することになる。$R(t)$の正確な形は，一般相対論の場の方程式から定められるものである(4.2節)。

$t=$一定の曲面の幾何学は因子kによって定まるが，kは$+1, -1$と0しかとることを許されない。もし$k=+1$なら，3次元空間の曲率は正である(球空間)。空間はそのとき2次元の球面から類似されるように閉じていて，有限な体積をもっている。このような空間の中では，半径rの球の表面積は$4\pi r^2$よりも小さい。もし$k=-1$なら曲率は負で，体積は無限大(双曲空間)となり，球の表面積は$4\pi r^2$よりも大きい。最後に，$k=0$は平坦な(ユークリッド)空間に対応し，球の表面積が$4\pi r^2$になる一般的な幾何学の性質を備えている。

1.5　物理的に見た時間非対称

世界線に接するベクトルを引くと，ベクトルの方向はすべての観測者にとって同じであると1.1節に述べたが，そのときこのベクトルは，**絶対未来**の

方向を定義するものとして用いることができるであろう。図 1.2 でいえば，矢印の向きである。しかしこのような方向の指定は，時空の多様体や世界線(そのほか何でもよいが)などの時間に対する非等方性や非対称性を全く意味してはいないということに注意しよう。すなわちこの段階では，過去方向と未来方向の間の区別は何ら**物理的**なものはなく，この時間方向は時空の中の異なる向きを論じるための便宜的な標示にすぎないのである。

しかしまた，これとは全く別の立場から，時空にはある**物理的**な時間的非対称(timelike asymmetry)性が存在することも考えられる。これには次の 2 種類があるようだ:

（1） 多様体自身の時間に対するある非対称性；たとえば，宇宙**膨張**のおかげで，現実には全体的で大域的な非対称性があるので，ロバートソン－ウォーカー計量(1.10)は，dR/dt の符号を通じてこの非対称を定義していることになる。

（2） **集団的な**局所的振る舞いによる世界線の非対称性；たとえば，光の発散する波面とか等温化する熱の流れとかは，多様体の全体にわたって，あるいはその部分領域の中で，時間的に方向づけられているようである。

ある人々[3]は，この非対称性(1)と(2)とは強く結合しているかも知れないと指摘している。

もしこれらの非対称性を図で表現しようとするなら，時間的方向に一つの**矢**を引くのが便利であろう。その場合どの方向かは大した問題ではなく，たとえば外へ向かう光の球面波の方向を示すように矢印を描いてもよい。このように選ぶと，ある特定の非対称性を表現する矢印は以前に先・後や過去・未来方向の規約を定義するのに用いた**別の**矢印と平行あるいは反平行となるだろう。そのとき，先・後関係の矢印を定めると，それは多様体の全体にわたって変わらない(1.1 節で仮定したように)ので，ある特定な点での二つの矢が互いに平行となることがあるだろう。これは，以上の規約を用いた場合，我々の現実の世界の時空領域において実際に成立していることである。しかしそれにもかかわらず，この平行性は宇宙のすべての点で，またすべての時間で正しくはないであろうとは推量できる。一般的には，自然の中に独立に起きていると思われる異なった物理的非対称性を示すいくつかの矢があるのであろう。そして，これらすべての矢，あるいはおそらくはその一部分は，多様体のある領域では先・後関係の矢印と逆向きになっている可能性を

認めなければならない。たとえば，dR/dt はこの時の未来を示す矢(膨張宇宙)を定義しているが，この矢は最終的には逆転して過去向き(収縮宇宙)となるかも知れない。

多様体上での時間方向(temporal orientation)を論じるために用いた**表現**と，時間に対する本当の物理的非対称性とをすでに区別したが，次に大切なことは，物理的時間を議論の余地の多い**心理的時間**と混同しないよう用心することである。時間の知覚認識は，**二重**になっている。第一に，心は時間を過去と未来の**向き**に分ける，すなわち経験を時間に関して非対称的にさせる。たとえば我々は過去を**記憶する**が，未来は**予測する**だけである。この**精神的**(mental)偏りは，我々の頭脳も周囲の世界と同じ物理的過程の中にあり，そこでは他のどんな電気化学系とも同様に**物理的**非対称の制約下にあるということに気づけば，直ちに理解できる。要するに，我々の経験は非対称である。なぜなら，それは我々がまわりの環境の中の他の非対称と結合されているからである。特に頭脳の中に在るときに**記憶**とよばれる情報の蓄積は，宇宙の中で我々をとりまいて起こっている一般的な情報蓄積の一つの典型的な例にすぎない(たとえば，月面のクレータは，月の過去の歴史についての情報を与えている)。そしてこれは，熱力学におけるエントロピーの情報的解釈と完全に一致する(2.6 節)。

さらに記憶と並んで，我々の時間経験には**第二**の側面がある。つまり我々の心は，物理的非対称によって時間の過去・未来の**向き**を区別するのみならず，時間を**その**過去と**その**未来とに**分割**する。そして心理的に区別されるこの二つの時間の部分は，移りゆく**現在の瞬間**とか**今**(now)によって分けられ，その**今**は“過去”から“未来”へ向かって間断なく動いているとされる。これが，時間は“過ぎゆく”という印象を起こさせるものである。多くの人々にとってこの印象は極めて深いので，これは精神活動の一側面であることを越えて，**時間自身**の性質となってしまっている。時間の“流れ”とはたびたびいわれることであり，しばしば流れゆく河になぞえられてさえいる。

物理学における 4 次元時空は，“現在の瞬間”とか時間の“動き”に対しては何の用意もない。実際のところ，特殊相対論によって同時性の概念ははっきりと捨て去られたので，異なる二つの場所での“同じ瞬間”というのはどんな場合でも無意味である。普遍的な今というものは，空間の広がりが時間の広がりをも内蔵しているミンコーフスキー空間の中には存在しない。あ

る一つの粒子による経験の継続という形で考えるかわりに，4次元の中のその世界線全体を扱わなければならないのである。ワイル[5]の言葉によると“客観世界は在る(*is*)のであって，起こる(*happen*)のではない”。

それにもかかわらず多くの著者[6]は，今の客観的物理的実在を主張して，時には量子力学の不確定性をその支持証拠として持ち出している[7]。しかし物理において“現在の瞬間”とか“時の流れ”とかいう概念を使うことに(心理学の場合とは逆に)反対する立場の中で最も受け入れやすいのは，これらは何にも新しいことではなく，現在の時空のわく組の中では全くの余計物だというものである。[原子集団は，その個々の原子の性質にはない**集団的**性質をもっている。たとえば生理学の研究により我々の身体の原子が生きているという結論にはならない。同様に心理学の研究をしても，我々の脳の原子が“今”という現象に参加しているということにはならない。生物と無生物の間に“一線を画する”ことができないという事実にもかかわらず，これらの注意は有用である[8]。] 多くの著者達によって強調されたように，これらの概念はこの場面では確かに無意味であると思われる。実際，時間の動きとか時間の**中**の今とかについてのどんな提言も，ミンコーフスキー空間の中での同語反復以上のものであるとは思えない[9]。時間という付加次元の導入なしには3次元空間の中の粒子運動を論じることは無意味であるように(たとえば流れゆく流星の観測と，その流星の軌跡の写真の検討とを比較せよ)，時間の中の運動とか時間の動きを，付加次元の“超時間”[10] (hypertime)を導入しないで論じることはおそらく無意味であろう。このような5次元構造をつくることは，人間の心理にあまりにこだわりすぎることになると思われる。もっとも，読者はこのような推量が量子力学におけるウィーグナーの解釈に似ていることに驚かされるかも知れない(6.3節)。この解釈では人間の心もまた，ふつうの4次元世界の“外部”にあり(あたかも一つの別の次元の中に)，量子的観測過程の時間非対称は観測したものが“人間の意識の中に入ってくる”ことの結果である[11]。我々が移りゆく“現在”を同定するのは，まさにまわりの世界から意識へのこの“侵入”によってである。

時間非対称についての論争の多くは，全く異なる概念，すなわち時間に関する実際の物理的非対称と明らかに**架空**な心理的時間の前向きの流れとの間の混同に基づいている[12]。この混同は，さきに物理的過程の時間に対する**非対称**を表現するのに用いた矢印をしばしば**今の瞬間の動きの方向**と誤って解釈させ，それが時間の流れというおかしなものになっている。そしてここか

ら，時間非対称を時間の“矢”とかさらに“時間の向き”とよぶという普遍的ではあるが，完全な見当違いが生じてくるのである[13]。

上記のことに加えてさらに，時間間隔は**内在的**方向をもっているというように，時間非対称の源を**時間自身の構造**の中に求めるべきだという信念が流布している。ときには，“一方向き”と“二方向き”の時間を区別することまで行なわれた[14]。方向づけられた時間についてのこのような考察は，時間についての何か新しいもの，あるいは有用なものを見出すのには全く無力であり，実験的支持も全然ない。それはおそらく，心理的時間と極めて近い見方をとるからであろう。

時間自身が非対称とか前向きの流れの性質を付与されているという時間の**能動的**解釈とは極めて対照的に，時間の**受動的**解釈も採用できる。そこでは時間は，固有の方向，動き，矢の向きなどは全くもたないと仮定する。我々にとっての時間とは，時空多様体の一つの部分空間にすぎず，それを使うことによって，事象を年代的に配列することができる。なるほど，時間非対称は物理的実世界に存在はしている。しかし，それはいつも**時間に関しての世界の非対称**(asymmetry of the world with respect to time)を意味するととるべきであって，それをしばしば“時間における非対称”(asymmetry in time)とか，単に“時間非対称”(time asymmetry)と略記している。この言葉を“時間の非対称”(asymmetry of time)の意味と混同してはならない。

1.6 構造的非対称の性質——時間反転の不変性

実世界が時間の二つの向きに対して構造的な相違を示しているということは，自然の明白な事実である。すなわち，時間の向きに対して非対称であるような物理的過程が起きているということである。この主張の意味をもう少し詳しく調べてみよう。

物理的パラメタである時間は，ガリレイによってはじめて数学的意味で導入された。そして後には，ニュートン力学の法則の基礎としてその中に組み込まれた。ニュートンの時間の定義を見れば，彼が時間概念を時間の“経過”についての心理的概念と関連深い絶対的な“永久の流れ”としてとらえていたことは明らかである。1.5節で時間の**流れ**と時間における**非対称**とをはっきり区別したが，ニュートンはこのような区別をしなかった。しかもニュートンが彼の力学法則をつくりあげたときには，時間パラメタ t(以後は x^0 よりもむしろふつうに t と書く)は，次のような意味で数式の中に対称的

に入っていた。

力の場 $\boldsymbol{f}$ の中を動いていて，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ によって記述される質量 m の粒子を考えよう。さらに，$\boldsymbol{f}$ は t に陽には依存しない(力の保存場)とし，$\dot{\boldsymbol{r}}$* にも依存しない(速度に依存しない力)とすると，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ となる。そのときはニュートン力学の第2法則によると次のようになる：

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f} \tag{1.12}$$

式(1.12)はある境界条件の下で解くことができる。たとえば位置 $\boldsymbol{r}$ と速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ をある初期時刻 t_0 で定めると，(1.12)の解はすべての時間 t にわたっての粒子の軌道を与える。ある特定の境界条件の組に対するそのような解の一つを $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\gamma}(t)$ と書く。そのとき(1.12)から

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\frac{1}{m}\boldsymbol{f}[\boldsymbol{\gamma}(t)] \tag{1.13}$$

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\gamma}(t)$ は力場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ の中の粒子に対する力学的に可能な軌道を表わしているということができる。ここで，(1.13)の中の t を形式的に $-t$ で置き換えると $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(-t)^2}\right.$ を思い起こして$\left.\right)$，

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(-t)=\frac{1}{m}\boldsymbol{f}[\boldsymbol{\gamma}(-t)]$$

したがって，$\boldsymbol{\gamma}(-t)$ は $\boldsymbol{\gamma}(t)$ がそうであるように力学的に可能な軌道である。この結果を次のように表現できる。これらの制限された状況の下で，ニュートン力学の第2法則は**時間反転($t\to-t$)に対して不変**である。[ここで，時間反転という用法は純粋に数学的な意味であって，過去へもどるということとは何の関係もない。物理的には，過程や速度を反転するのと同じである。]

$\boldsymbol{\gamma}(-t)$ は運動方程式を満足していても，すべての t に対して $\dot{\boldsymbol{r}}=0$ という無意味な場合を除くと，$\boldsymbol{\gamma}(-t_0)\neq\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ であるから一般的には境界条件を満たさないことに注意しなければならない。時間反転とは，$\boldsymbol{r}$ はそのままにして，すべての速度を反転するものである。

$$\boldsymbol{r}\longrightarrow\boldsymbol{r}$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}\longrightarrow-\dot{\boldsymbol{r}}$$

したがって $\boldsymbol{\gamma}(-t)$ は，$\boldsymbol{\gamma}(t)$ の境界条件を**時間反転**したものに対する(1.12)の解である。時間反転は，もとの運動を映画フィルムにとり，それを逆向きに回すことと考えてもよい。たとえば時計回りに動いている粒子の軌道は反

* 点は t についての全微分を示す。

時計回りの軌道になる。もし，この時間反転した運動もまたもとの運動方程式の可能な解であるならば，そのとき系は**時間反転に対する対称性**とか**可逆性**を示すという。これは多粒子系についても直ちに一般化できる。[系のラグランジュアンが時間反転に対して不変なら，常に可逆性が成立する。]

しかし初等力学においては，時間反転に対する対称性を**もたない**系の例が多く見られる。よく知られた例は，電荷 e をもつ粒子の磁場 $\boldsymbol{B}$ の中の運動である。このような系の運動はローレンツの法則で記述され，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} \tag{1.14}$$

となる。これは時間反転によって次のように変わる：

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-e\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} \tag{1.15}$$

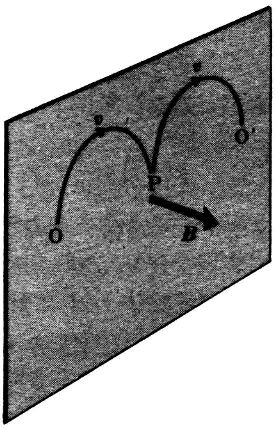


図 1.6 時間反転の対称性の破れ？（正荷電粒子は O から速さ v で打ち出され，磁束 $\boldsymbol{B}$ による力を受けながら弧を描いて P に進む。P で粒子速度を逆転すると，新しい経路 PO′ をとり，PO に沿って元にもどることにはならない。）

これの物理的意味は，図 1.6 を見るとよくわかる。最初 O にあった粒子が $\boldsymbol{B}$ に垂直な平面内のある向きに速さ v で打ち出される。この粒子は円弧を描いて，同一平面上の一点 P に同じ速さで到達する。もし，点 P で粒子の速度を反転すると，$\overset{\frown}{\mathrm{PO}}$ に沿ってもどるのでは**なく**，図のような円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PO'}}$ を描く。したがって，反転した映画フィルムでの $\overset{\frown}{\mathrm{PO}}$ に沿う運動は電磁気学の法則に反することになる。すなわち，この系は時間反転の対称性をもたないのである。

他に身近な例として，粘性媒質中とか摩擦力のある粗い表面上での物体の運動がある。このような系では，粘性抵抗や摩擦力は，通常，物体の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ に比例することがわかっている。運動方程式(1.12)はそのとき

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})-\alpha\dot{\boldsymbol{r}} \qquad (\alpha=\text{正の定数}) \tag{1.16}$$

となる。(1.16)は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})=0$(強制力なし)での通常の**減衰**運動に対して解くことができる。この場合(1.16)は直ちに積分できて $|\dot{\boldsymbol{r}}|\propto e^{-(\alpha/m)t}$ となり，$t\to\infty$ では $|\dot{\boldsymbol{r}}|\to 0$ となる。つまり粒子は減衰しながら静止の状態になる。t を $-t$ に変えると(1.16)の減衰項の符号が変わり，指数関数的に増大する解 $|\dot{\boldsymbol{r}}|\propto e^{(\alpha/m)t}$ が得られるが，これでは粘性的媒質や摩擦的媒質との接触で無限大の速度まで自発的に加速されることを意味し，明らかに物理的ではない。

さらに別の興味深い減衰力は第5章で詳しく論じるような，自分の固有電磁場と結合した荷電粒子の運動に関連している。その場合，非相対論的極限ではある特定の運動方程式が次のようになることが示される：

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})-\frac{2}{3}e^2\dddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.17}$$

式(1.17)では第3項が減衰項を表わしているが，それは $\boldsymbol{r}$ の時間に関する3階微分となっている。粒子の運動エネルギーの損失は空間に流れ去る遅延電磁輻射として現われるが，その逆の状況すなわち $\dddot{\boldsymbol{r}}$ の減衰項の正符号は先進輻射の荷電粒子への収束に対応し，自然の中では起こらないと思われる。

これら三つの非対称な力学現象の例は，時間の向きの選択を示す基礎的法則を与えるのではないかと思われるかも知れないが，事実はそうではないことに注目しよう。

それを理解するためには，上の例での“系”の正確な意味を調べなければならない。これら三つの場合に我々は，電磁場とか粘性媒質のような種々のものと相互作用しながら動いている一つの物体についての力学のみを考えた。そして相互作用を生じる詳しい過程については何も問わなかった。そこで論じた時間反転は，問題の物体の1自由度に対してのみ適用され，系全体に対してではなかった。しかし，もし時間反転を系全体に適用するなら，上記の三つの例に現われた非対称性は消えてしまうのである。

最初の例では，磁場中の1荷電粒子の振る舞いが非可逆的であった。しかし磁場自身も荷電粒子群の運動によりつくられるものなので，これらの粒子群の時間反転をすると磁場の符号が変わり，$\boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{B}$ となる。この変換が(1.15)の中に含まれるならば時間対称が復活する。

第二の粘性や摩擦減衰の例では，粒子の運動エネルギーが熱の形で媒質の原子に移り，粒子の運動が遅くなる。もし個々の原子の運動も反転するとなると，原子間相互作用を支配する物理法則の不変性のために個々の衝突も反転し，運動量の集中的移動が起きて，物体は指数関数的に加速されるということがわかる。

最後の加速荷電粒子の輻射減衰の例では，荷電粒子の近傍から流れ去る電磁輻射はその後実験室の壁に吸収されると仮定している(第5章ではそれを問題としているが)。この吸収は電磁場が壁の荷電粒子群を動かすことによって起こり，さらにこれらの運動荷電が他の荷電と(可逆的に)衝突して，エネルギーは熱として散逸する。そこで系全体の時間反転はこんどは実験室の壁のすべての原子の運動の反転を含まなければならないが，これによって最終的にはエネルギーが荷電粒子群に与えられることになるだろう。そしてこれら加速荷電粒子群は輻射を生じ，通常の時間反転の形で最初の荷電粒子の上に集まるコヒーレントな電磁波となって，その荷電粒子が加速される。

これら三つの例は，**物理のすべての知られている法則は時間反転に対して不変である**という(ただ一つの例外はあるが)，注目すべき自然の基本的事実を示唆している。つまり与えられた三つの例では，可逆性は時間反転の下での電磁法則の不変性によるものである(なぜなら，原子衝突さえ基本的には電磁的性格であるから)。そして同じ不変性は強い相互作用，弱い相互作用や重力相互作用にも適用できることが知られており，この不変性は相対論的あるいは量子力学的取り扱いになっても除かれることはないのである。

この著しい対称性は破れないと最近まで思われていたが，1968年，K中間子を含むある種の素粒子過程では破れていることが発見された。しかし，この本で関心のあるほとんどの現象の対称性とは全く関係がないので，K中間子の問題は6.4節までふれないで，そこで簡単な議論を与えることにしよう。

したがって，物理的法則自身は時間非対称を与えていない，とここでは結論せざるをえないけれども，**実際には**世界は時間について非対称であるというのが，経験の最も基礎的な一面である。このことは次のようにも表現される。時間非対称は“法則的”というよりも“事実的”であるとか，“本質的”というよりも“付帯的”であると。これは，ある特定の**境界条件**が自然の中で他に優先しているということの結果として，非対称の振る舞いが観測されるという意味である。たとえば，“負の摩擦”による物体の指数関数的加速

は，物理法則の中に存在する可能性はあるが，この過程に対する境界条件は**実際には**自然の中には起こらないと思われる。なぜそうであるかは，以下の章で明らかにしていこう。

参考文献

1. H. Weyl: Phys. Z. **24**(1923)230; Phil. Mag. (7) **9**(1930)936.
2. H. P. Robertson: Astrophys. J. **82**(1935)284; **83**(1936)187, 257. A. G. Walker: Proc. Lon. Math. Soc. (2) **42**(1936)90.
3. T. Gold: Amer. J. Phys. **30**(1962)403.
4. J. Wild: Rev. Metaphys. **7**(1954)543 に次の代表的な記述がある。“世界中のすべての物は時間の不可逆な流れの中に投げ込まれていて，この流れは早めることも遅くすることもできないが，一定の割合でいたるところに流れている。”
5. H. Weyl: *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1949) p. 116.
6. H. Reichenbach: Ber. Bayer, Akad. Munchen. Math.-Naturwiss., Abt. **157**(1925); *Philosophy of Space and Time* (Dover, New York, 1958) p. 138. M. Capek: *The Philosophical Impact of Contemporary Physics* (Dover, New York, 1961) p. 165. A. S. Eddington: *The Nature of the Physical World* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1929) chap. 5.
7. H. Reichenbach: Ann. Inst. Poincaré **13**(1953)154. H. Bondi: Nature **169**(1952)660. G. J. Whitrow: *The Natural Philosophy of Time* (Nelson, *London*, 1961) p. 295.
8. A. Grünbaum: “The anisotropy of time” *The Nature of Time*” ed. T. Gold (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1967) p. 152 の中の犬やゴキブリなどについての注意と対照せよ。
9. A. Grünbaum: 上掲 8, p. 152.
10. たとえば，R. Taylor: “Spatial and temporal analogies and concept of identity J. Philos. **52**(1955), reprinted in *Problems of Space and Time,* ed. J. J. C. Smart (Macmillan, New York, 1964) p. 338. 時間の動きの速さについては，J. J. C. Smart: Analysis **14**(1954)80. M. Black: Analysis **19**(1959)54.
11. A. Grünbaum: 上掲 8.
12. たとえば，P. W. Bridgman: *Reflections of a Physicist* (Philosophical Lib., New York, 1950) p. 163.
13. この点は上掲 10 の後者二つの文献によって強調された。
14. S. Hwang: Foundations of Physics **2**(1972)315.

より進んだ読者には

1. 宇宙時間の同一性の歴史的議論は，J. D. North: *The Measure of the Universe*

(Clarendon Press, Oxford, 1965).

2. "今"の状態についての文献は膨大である。以下の出版物は本書の観点を支持するように思われ，また多くの他の文献を含んでいる。A. Grünbaum: "The status of temporal becoming" Ann. N. Y. Acad. Sci. 138(1967)374; *Modern Science and Zeno's Paradoxes* (Wesleyan Univ. Press, Middletown, 1967) chap. 1; *Philosophical Problems in Space and Time* (Knopf, New York, 1963 and Routledge and Kegan Paul, London, 1964). D. Williams: "The myth of passage" J. Philos. 48(1951). J. J. C. Smart: "The river of time" reprinted in *Essays in Conceptual Analysis*, ed. A. G. N. Flew (Macmillan, London, 1956). A. Grünbaum, R. Taylor and N. Goodman: *Problems of Space and Time*, ed. J. J. C. Smart (Macmillan, New York, 1964) の記述および文献録。

3. 時間に関する概念的または用語的な混乱は，次の論文に明らかにされている。M. Bunge: "Time asymmetry, time reversal, and irreversibility" Studium Generale 23 (1970) 562.

2

熱力学と統計力学

2.1 熱力学の第2法則

時間に対する非対称な過程の議論の基礎にはいつでも熱力学が現われてくる。これには二つの理由がある。第一には，熱力学的性格をもった非対称な現象が我々の体験全体にわたっているからである。事実，我々が生物学的な有機体として存在していること自体がその一例である。第二には，統計力学の発展と，さらに最近の非可逆的非平衡過程の理論は，なお厳密な数学的証明が多くの点で欠けてはいるが，基礎的非対称性の本性を明確に理解する道を開いたからである。

熱力学的現象における時間非対称の現われ方は，非常に多岐にわたっている。たとえば，色のついた気体で満たされたフラスコの口から気体が拡散していくのを見る場合，氷の塊を温かい湯の中に入れてとけるのを観察する場合，あるいは電熱線から熱が放射される場合を考えてみればわかる。これらの過程には，これらの逆の順序の現象は決して起こらないという意味の非対称性がある。つまり口の開いたフラスコにひとりでに気体の分子が集まることはないし，水さしの中の温かい湯の一部がひとりでに凍ることもないし，ふつうの電熱線を熱したときに電気が生じることもない。

実際，このような例は枚挙にいとまがなく，物理学のすべての分野で体験するものである。これらは種々の異なった種類の現象であるにもかかわらず一つの共通点をもっている。つまり，これらの例はエネルギー，特に熱エネルギーの有用性を失わせるような時間非対称を示す。今日，人類に役立つエネルギー資源に多大の注目が集められているが，エネルギーがただあるだけ

では役立つとは限らない。役立たせるためには**非平衡**の状態にあるエネルギーが要求されるのである。これを示す例としてよく引用されるのは，海の熱エネルギーを利用して船を進めることはできないということである。海の水は絶対温度で数百度であるが，この膨大なエネルギーを我々の目的に使うことはできない。我々が利用するのは，熱力学的なすべての非対称現象のうち，非平衡の状態にあるエネルギーがもはや変化が起こらないで役に立たない平衡状態へと移行する点である。

このような体験は熱力学の第2法則として知られているものにまとめられ，これにはいろいろな表現の仕方がある。ケルヴィンとクラウジウスによる表現を簡単にいえば，

熱は，自然には，冷たい物体から熱い物体へ流れることはない。

ということである。ここで重要なのは“自然に”という点である。冷蔵庫では電気的あるいは化学的なエネルギーを使って，このような流れを起こしている。要するに

放置(弧立)されたすべての体系は熱平衡の状態へ近づき，再びそこからはずれることはない。

ということである。そして明らかにこれは“時間の一方向き”の(すなわち，ふつうの意味で過去から未来へ向かうにつれ，平衡へと近づく)傾向であり，これは第1章で議論したように時空多様体に非対称性をつけるものである。この非対称性が時空多様体のどこでも同じ向きに向いているか，あるいは，これが欠けている領域や逆になっている領域があるかどうかは後で吟味することにする。さしあたり，我々のいる時空の局所領域で非対称性の向きが一貫して存在するということは確立された事実であると仮定して，これがどうして生じたかを問題にすることにしよう。

上に述べた発見的な事項は，熱力学の第1および第2法則を導入すればより正確にすることができる。熱量 Q を**エネルギー**と考えれば熱力学的体系の**内部エネルギー** E，および変化の際に体系がその周囲に対してする**仕事** W との関係が導かれる。この関係は**熱力学の第1法則**

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}'Q-\mathrm{d}'W \tag{2.1}$$

に含まれている。

ここで，体系の体積は V で，その圧力を p，温度を T と表わし，成分がどこでも一様な場合に限定しよう。E は体系の状態だけの関数で，この場合

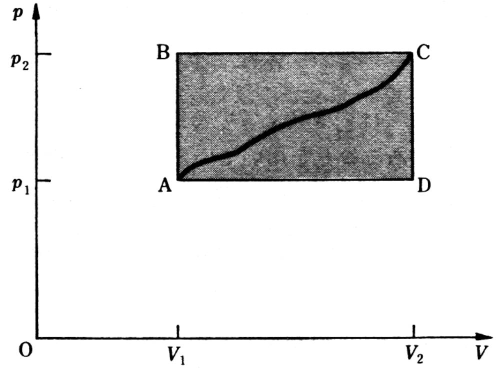


図 2.1 気体の二つの状態(p_1, V_1)と(p_2, V_2)を結ぶ三つの道〔上の道(ABC)では圧力を p_1 から p_2 に上げ，その間体積は変わらず(仕事なし)，その後気体は体積 V_1 から V_2 に圧力一定 p_2 のままで膨張し，その際まわりへ仕事 $p_2(V_2-V_1)$ をする。下の道(ADC)では気体はまず膨張し，そのためなされる仕事は $p_1(V_2-V_1)$ だけである。中の道(AC)はこれらの中間の場合である。〕

はたとえば p と V の関数である。したがって状態変化に伴う E の変化は途中の道によらず，始めと終わりの状態だけで決まる。すなわち(2.1)の $\mathrm{d}E$ は完全微分である。$\mathrm{d}'Q$, $\mathrm{d}'W$ はそうでなく不完全微分(d にダッシュをつけて表わす)である。いいかえると，二つの状態の間の変化に伴うこれらの変化量は途中の道に依存し，そのため，これらはある関数 Q, W の微分とは考えられないのである(図2.1)。しかし $\mathrm{d}'Q$ に適当な積分因子を掛ければこれを完全微分にすることができる。歴史的にいえば，この積分因子は熱機関の運転に対する考察から求められた。特に閉じたループに沿って変化する場合，このループに沿う積分 $\oint\frac{\mathrm{d}'Q}{T}$ が消える過程がある。大ざっぱにいえば，その過程というのは，それを逆にたどったとき，体系**および**その周囲が元の状態にもどせるようなものである。すなわち全系と周囲の変化がどこでも**可逆**な場合である。この用語は後にさらに注意深く説明する。以上の数学的性質の明白な帰結の一つはこのような閉じたループ上の二つの**異なる**点を結ぶ過程に沿った積分 $\int\frac{\mathrm{d}'Q}{T}$ はループをどちら向きに回っても同じ値になることである。閉じた道の形は全く任意で，この積分は二つの点を結ぶ道によらないことになる。したがって可逆な過程において量 $\int\frac{\mathrm{d}'Q}{T}$ は完全微分であり，$\mathrm{d}'Q$ に対する積分因子は温度の逆数と同じものである。

こうして得られた完全微分を $\mathrm{d}S$ と書く。ここで S は新しい状態関数で

エントロピーとよばれる。dSを用いれば(2.1)の熱力学の第1法則は

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}E}{T}+p\,\mathrm{d}V$$

と書かれる。ここではいま考えている簡単な体系の場合になされる仕事が力学的膨張 $p\,\mathrm{d}V$ であることを用いている。さらに複雑な体系で内部の異なる成分の相対濃度 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ が変化できる場合には上式は

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}E}{T}+p\,\mathrm{d}V+\sum_i\frac{\partial S}{\partial n_i}\mathrm{d}n_i \qquad (2.2)$$

で置き換えられる。

厳密に可逆な変化は，理想化としては考えられるが，実際の世界では起こらない。これに対し，この節の最初に述べた時間非対称的変化の例はすべて**非可逆**であった。すなわち，体系**および**周囲を元の状態にもどすことはできない。これはたとえばとけた氷を凍らすことはできないということではなく，そうするためには必要な装置(冷凍機のような)が非可逆変化を受けて働かなければならないということである。体系の外部の何らかを使うことなしに**すべての物**を初めにあった状態にもどすことは決してできない。

非可逆過程の一般的な振る舞いは**熱力学の第2法則**で述べられ，これは

$$\Delta S\geq\int\frac{\mathrm{d}'Q}{T}$$

で表わされる。ここで ΔS はエントロピーの増加を意味し，符号は厳密に可逆な過程にのみあてはまる。体系が断熱的(熱がとおらない)容器内に隔離されている特別な場合は $\mathrm{d}'Q=0$ であるから，実際の世界で起こるすべての自然な変化に対して上の不等式は

$$\Delta S>0 \qquad (2.3)$$

となる。言葉で表わせば，第2法則は**孤立系のエントロピーは減少することがない**ということである。さらにすべての自然な変化は孤立系のエントロピーを増大させるので，もはや変化の起こらない状態は**エントロピー最大**の状態でなければならない。このような状態は熱力学的**平衡状態**とよばれる。

第2法則を明示するため二つの例を考えよう。

まず，それぞれ一定の温度 T_1 と T_2 に保たれた二つの熱源が熱接触しているとする。もしも $T_1>T_2$ ならば，熱源1のほうが高温なので，1から2に熱が流れるであろう。その熱量を Q としよう。1のエントロピー変化は $-Q/T_1$ であり，熱源2のエントロピー変化は $+Q/T_2$ である。したがって全エントロピー変化は $Q\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$ であり，温度の違いから，この量は0

よりも大きい。したがってエントロピーは増大したのである。この例で熱力学の第2法則は，熱が常に高温から低温の物体へ自発的に流れるという原理を表わしている。もしも $T_1=T_2$(熱平衡)であるときに限って熱の移動は可逆であるが，それはどの熱源も他のものよりも熱くはないからである。この場合，期待されるように，エントロピーの変化はない。

第二の例として，N 個の原子からなる理想気体(分子間の相互作用のない)が円筒とピストンで囲まれて，熱的に遮断されているものを考える。この場合分子運動論により，1原子分子の理想気体のエントロピーは，付加的な任意定数を除けば，

$$S=Nk\log(VT^{3/2}) \tag{2.4}$$

で与えられることがよく知られている。ここで k はボルツマン定数である。この気体を膨張させる方法として，二つの極端な方法がある。その一つは，極めて急速に(分子の速さよりもずっと速く)ピストンを引く方法で，このとき，気体は真空中へ広がるのと本質的に同じことになり，この過程で，気体の分子はピストンに対して仕事をしない。そして理想気体の温度は内部エネルギーに比例するが，いま第1法則により内部エネルギーは不変であるから，気体の温度は変化しない。したがって，(2.4)により，気体のエントロピーは $Nk\log(V_2/V_1)$ だけ増加する。ここで V_1 と V_2 は，それぞれ初めと終わりの体積である。

他方で，ピストンが無限にゆっくり引かれたとすると，気体はどの瞬間でも(平衡状態を保ち)どこでも一様な圧力と温度とが保たれると仮定してよいだろう。そうすると圧力と温度は理想気体の法則 $pV=NkT$ で関係づけられる。この場合，気体は引かれて行くピストンに対して $p\mathrm{d}V=NkT\mathrm{d}V/V$ を積分しただけの仕事をする。容器が断熱的であるとしているので，第1法則(2.1)から(気体の内部エネルギー E に対して)

$$\mathrm{d}E=\frac{3}{2}Nk\mathrm{d}T=-\frac{NkT\mathrm{d}V}{V}$$

が成り立つ。[したがって $\frac{3}{2}\mathrm{d}T/T+\mathrm{d}V/V=0$ である。] これから $\log(VT^{3/2})$ が不変であるという結果が得られる。(2.4)により，エントロピー変化はゼロであることになる。この場合は，膨張の方法は準静的であり，明らかに可逆であるから，この結果は予期されたことである。もしピストンを準静的に前進させて，初めの位置にもどせば，外部仕事も熱の出入りもなく，気体は初めの状態にもどる。急速な圧縮ではこのようなことはない。なぜなら，気

体はピストンの前進を予測して，ピストンが気体の圧力に対して仕事をしないようにピストンがくる前に退かなければならないからである。このようにして第2法則は，第二の例では気体は真空中へは自然に広がるが，自発的により小さな体積に縮まることはないという原理を表わすことになる。しかもここから可逆という概念の本性に対するいくらかの理解も得られる。理想的な可逆変化に近づくには，体系の状態の時間的変化は，状態変化によって起こるどのような過程に対しても，その体系の**緩和時間**よりもずっとゆっくりしたものでなければならない(2.2節)。上の例においても，可逆変化は**平衡条件**の下で起こることは明らかである。

“可逆”と“不可逆”という言葉はときにより，まぎらわしい用語である。それは第3章で示すように，統計力学の結果は，分子運動を考慮したとき，孤立系のエントロピーが減少する可能性も実際に認めるものであるという理由からである。しかしそれにもかかわらず，熱力学的体系の**巨視的な**性質について述べるときには，この本ではこれらの言葉を続いて用いることにする。読者は，この**巨視的**可逆性を全く別の概念である**微視的**可逆性と混同しないように充分注意してほしい。後者，すなわち微視的可逆性は2.2節で議論するが，これは物理学の法則の時間の逆転に対する不変性，あるいは対称性(1.6節)と深く関連のある事柄である。したがって，まぎらわしい場合には“微視的”あるいは“巨視的”という形容詞をつけて区別したい。微視的不可逆性は必ずしも時間における非対称性を意味せず，また微視的可逆性は必ずしも時間における対称性を意味しないので，この区別は重要である。これに対し，熱力学的非可逆性は時間における非対称性を意味するものである。

2.2 気体の分子運動論

熱力学の第2法則が示す時間非対称の本質を理解する第一の段階は，巨視的体系を構成する個々の分子に対して古典力学を適用することである。この問題における先駆的な仕事はクラウジウス(Clausius)[2]，マクスウェル(Maxwell)[3]およびボルツマン(Boltzmann)[4]によってなされた。この重要な発展のあらましを考察しよう。

考察する体系として，気体の簡単化されたモデルをとり上げる。これはまず，

(1) N 個の多数で同等な球形の粒子からなりたつ。

(2) これらが体積 V の中に閉じ込められている。

（3） その壁は完全になめらかで固く，弾性的に粒子を跳ね返えす。

（4） その壁はエネルギーを通さず，箱の内部は孤立して断熱的に囲まれている。

（5） 粒子は互いに短距離力で相互作用をして衝突するが，気体は充分希薄であるため，2分子衝突を考慮すれば充分である。

と仮定する。粒子の運動は非相対論的な古典力学の法則で取り扱う。もっとむずかしいモデルも，量子力学的な考察（第6章参照）を含めて時間非対称性の問題に対して，本質的に何も新しいものを加えない。

我々の体系の完全な微視的形状は全粒子 N 個の3個の位置座標 q_i と3個の運動量座標 p_i とを指定すれば定まる。これらが一度与えられれば，気体の振る舞いは全過去と全未来にわたって，因果的な運動法則により（初期値問題——5.7節）決定される。これら6個の座標は6次元の空間を構成し，これは μ 空間とよばれる。一つの粒子の任意の時刻の位置と運動量（あるいは速度）は μ 空間における1個の点として表わされる。N 粒子からなる全系は μ 空間における N 個の点として表わされる。気体の微視的形状が変化するにつれ，N 個の点は動き回る。しかしふつうの場合，我々は 10^{23} 個（1グラム分子）の粒子を扱い，個々の粒子の運動を考えるのではない。というのは，

（1） 全粒子の位置と運動量とを同時に知ることはできないし，

（2） もしもこれらがわかったとしても，運動を計算するのは複雑で不可能と思われる。

からである。そこで我々は次のように進む。まず μ 空間を小さな細胞に分割し，その細胞の体積は多数の粒子を含むほど大きいが，巨視的な大きさに比べれば無限に小さい程度のものとする。この細胞の大きさは巨視的観測の分解の限度に相当する。実際の気体に対してこのような分割は可能である。

各細胞はその平均的な座標によって名づけられ，簡単のためこれらを $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ と書く。またその体積 $\prod_{i=1}^{3} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i$ を $\mathrm{d}^3q\,\mathrm{d}^3p$ と書く。そして細胞の中の粒子を区別せずに，巨視的観点からただその総数だけを問題にし，この数を $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}^3q\,\mathrm{d}^3p$ と書く。ここで f は μ 空間における**密度**であり，**分布関数**とよばれる。f を μ 空間の全細胞にわたって積分すれば

$$N=\iint f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)\ \mathrm{d}^3q\,\mathrm{d}^3p$$

となる。f が既知ならば，問題にする任意の巨視的な量は全分布に対する適

当な平均を計算することによって与えられるだろう。

f に対する運動方程式を求めるため，最初，粒子間の相互作用がないと考えよう。このとき実空間において各粒子は一定の $\boldsymbol{p}^2$ をもち，直線上を運動するだろう。μ 空間において各粒子は超球面($\boldsymbol{p}^2$＝一定)の上を動き，細胞はこの場合，超球殻である。そしてこの状況下では，N 個の点はこの殻の中で独立に連続的な軌道を描く。したがって μ 空間におけるこれらの軌道はふつうの空間における流体の流線に似たところがある。特に N は一定であるから，連続方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}_6\cdot(\boldsymbol{u}f)=0 \tag{2.5}$$

が成り立つ。これはふつうの保存方程式を6次元に一般化した方程式である。$\boldsymbol{u}$ は6次元の"速度"ベクトル$(\dot{q}_1,\ \cdots,\ p_3)$であり，$\boldsymbol{\nabla}_6$ は6次元の発散$\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial}{\partial p_3}\right)$である。ここで $\boldsymbol{p}^2$ は一定であるから，(2.5)は

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_q)f=0 \tag{2.6}$$

に帰する。ここで $\boldsymbol{v}(=\boldsymbol{p}/m)$ と $\boldsymbol{\nabla}_q$ はそれぞれ3次元の速度と($\boldsymbol{q}$ 空間で働く)勾配演算子である。方程式(2.6)は時によって，体系に働く外力 $\boldsymbol{F}$，たとえば重力の影響を含むように一般化される。この場合，方程式(2.6)の代わりに

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}_q+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\boldsymbol{\nabla}_v\right)f(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{v},\ t)=0 \tag{2.7}$$

が成立する。ここで $\boldsymbol{\nabla}_v$ は $\boldsymbol{v}$ に対して働く勾配演算子である。

簡単のため $\boldsymbol{F}=0$ と仮定しよう。また気体は V の中で一様に分布しているとする(すなわち位置と速度の相関はないとする)。このときに $f=f(\boldsymbol{v},\ t)$ であり，(2.6)は単に

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{2.8}$$

となる。したがって**任意**の速度あるいはエネルギー分布に対して，f は運動の定数である。別の表現をすれば，任意の関数 f は平衡分布である。

それはさておき，次の問題に移ろう。いま μ 空間の中に N 個の点をでたらめに投げ入れることができると考えよう。ただ一つの制限として体系の全エネルギーは定められていて，$\boldsymbol{E}$ に等しいとする。投げるたびに微視的には違った点の配置が起こるであろうが，大多数の場合はほとんど**同じ**分布関数 f を与えるだろう。なぜならば，巨視的には小さな細胞内の配置を区別する

ことができないからである。このような状況における最も確からしい分布の関数を計算するのは容易である。特定の分布を与えるような粒子の交換の総数を計算し，N と E を一定に保つ制限の下で，これを最大にするものを求めればよい。この計算はラグランジュ(Lagrange)の未定係数の方法を用いれば実行できて，その結果は

$$f(\boldsymbol{v}) \propto \exp(-\beta \boldsymbol{v}^2) \tag{2.9}$$

となる。これは**マクスウェル分布**として知られている。

以上は完全な理想気体に限った議論である。粒子間の相互作用を入れたときは粒子間の衝突を考慮しなければならない。連続方程式(2.5)は μ 空間における軌道の連続性から導かれた。粒子が衝突すると，その粒子に相当する μ 空間の点は占領していた細胞から出され，それに近い点とは一緒の運動を続けなくなる。軌道は急に切れて，粒子の新しい速度に相当する別の場所に現われる(気体は充分希薄なので分子衝突は粒子の自由な運動をたまに切断するだけであると仮定する)。同様に，他の点は衝突によって μ 空間の別の領域から移ってきて問題にしている領域に現われることになる。一定の領域では点が保存されない，このような事情を考慮して，方程式(2.5)の右辺に湧き出しの項を付加しなければならない。この項は衝突項 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$ とよばれ，(2.6)，(2.7)および(2.8)にも付加される。一般的な方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_q+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\nabla_v\right)f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} \tag{2.10}$$

となる。これは**ボルツマン方程式**として知られている。

相互作用がいかに小さくても，衝突の効果は物理的に次のようにいうことができる。初めに任意の分布関数 $f(\boldsymbol{v})$ があったとする。(2.10)の衝突項のため，これは必ずしも平衡分布ではありえない。衝突の効果により，μ 空間の中の点は衝突ごとに違った位置へ移される。この段階において，重要な，証明されないが本来統計的性格の仮説を導入しなければならない。すなわち，

衝突ごとに μ 空間における点はでたらめに配置換えをさせられる。(A)

もしも仮説 A が正しければ，配置換えさせられた点は，低い確率の分布よりも，高い確率の分布へ移るであろう。特に最後には最も確からしい分布(2.9)に到達するであろう。そして一度これに到達すれば，配置換えをしても，この分布から出ることはないであろう。したがってマクスウェル分布は気体の自然な平衡分布であると考えられる。10^{23} 程度の N では，一度達せ

られた(2.9)からの事実上の偏差は全く小さい[5]。平衡に充分近く達するのに必要な時間は**緩和時間**とよばれる。これは分子の衝突間の時間と密接な関係のあるものである。

以上の議論は，でたらめな衝突の影響によって気体が任意の状態から平衡状態へ進行する理由に対して，もっともらしい物理的な像を与えるものであるが，これはまだ数学的に示されたわけではない。数学的取り扱いの第1段階は考えているモデルに対して衝突項 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{coll}}$ を評価することである。この計算は粒子の対称的な形と，2分子衝突だけを考えればよいということによって相当に簡単化される。そして運動量よりも速度で扱うほうが都合がよい。この場合，速度が $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1$ にあり，位置が小さな領域 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}$ にある粒子，すなわちタイプ1の粒子の数は $f_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}_1, t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_1$ であり，これを簡単のため $f_1\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_1$ と書こう。

このようなタイプ1の粒子は絶えず他の粒子から衝突を受けるので，この領域 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_1$ に止まっていられず，衝突によって別の領域に移される。たとえば，速度が $\boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2$ の間にあるタイプ2の分子は分子1に対して相対速度 $|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|$ をもち，流れ $f_2|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_2$ を形成する。このようなパラメタをもつ衝突によって，はじめの粒子速度は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ から $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'$ へ変化し，これらの間の角度をある量 Ω だけ変える。タイプ1とタイプ2の粒子の衝突の断面積を $\sigma(\Omega)$ とよべば，タイプ1の粒子との衝突は単位時間に

$$f_2|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\sigma(\Omega)\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_2\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.11}$$

と書かれる。したがって単位時間に衝突を受けるタイプ1の粒子の総数は

$$f_1\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}_2\int\mathrm{d}\Omega\,\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|f_2 \tag{2.12}$$

である。ただし，ここで積分は $\boldsymbol{v}_2$ のすべての速度と偏角 Ω についてなされる。

これよりさらに進むには，**分子混沌**(molecular chaos)とよぶ仮説を導入する必要がある。これはボルツマンによって**衝突数仮説**として導入されたが，これはすでにクラウジウスの仕事にも含まれていたものである。これは次のように述べることができる：

衝突前の粒子の位置と速度とは相関がない。　　(B)

仮説BはAとは独立であり，これらの関係は次第に明らかになるであろう。物理的には仮説Bは，タイプ1の粒子と衝突しようとしているタイプ2の粒子の数が気体内の任意の点におけるタイプ2の粒子の数に等しいこ

と，すなわち衝突する分子の流れはこれから**衝突する**という事実とは無関係である，ということを意味する。数学的にいえば，f_1 と f_2 は**同じ関数**である，ということになる。

粒子を $\mathrm{d}^3q\,\mathrm{d}^3v_1$ へ返すような衝突は**逆衝突**とよばれる。この過程に対する(2.12)に類似な表式は

$$f_1'\int \mathrm{d}^3v_2'\int \mathrm{d}\Omega\,\sigma'(\Omega)\,|v_1'-v_2'|f_2' \tag{2.13}$$

である。ここで f_1', f_2' は上述のと同様な分布関数であるが，その速度はそれぞれ $\boldsymbol{v}_1'$ と $\boldsymbol{v}_2'$ である。また σ' は逆衝突の断面積である。

これまで，衝突力について何もいわなかった。この力の正確な性質に関心はないが，ここでは**時間反転に対して不変**であることが要求される。この要求は，1.6節で述べたように，自然界においては満たされているように思われる。さらに，この力は短距離力であることを付け加える。ここで論じている型の衝突を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rightarrow\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'\}$ で表わし，逆衝突を $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'\rightarrow\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ で表わせば，すべての粒子の向きを反対にした**反対**衝突は $\{-\boldsymbol{v}_1', -\boldsymbol{v}_2'\rightarrow-\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2\}$ として理解される。時間を逆転したときに相互作用が不変であることは，任意の衝突の断面積がその反対の衝突のそれと等しいことを意味する。すなわち:

$$\sigma(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2;\ \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')=\sigma(-\boldsymbol{v}_1', -\boldsymbol{v}_2';\ -\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2) \tag{2.14}$$

この結果は古典的な**微視的可逆性の原理**として知られている。

式(2.14)を用いて**逆衝突** $\{\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'\rightarrow\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ の断面積 σ' についての**知識を**得ることができる。これは，我々の粒子モデルがさらに他の対称性をもつという事実によるものである。すなわち，回転と一つの面内での鏡映に対する対称性である。これら合わせて三つの対称性の結合は，反転に対する対称性と同等であり[6]，

$$\sigma(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2;\ \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')=\sigma'(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2';\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \tag{2.15}$$

となる。この結果は，運動学的に許される逆衝突をもたないような対称性の少ない粒子では成り立たない(図2.2)。これは多原子分子を古典的に考えれば起こることである。この場合はいくつかの衝突の閉じた輪を考えればよいことが示されている[7]。しかし量子力学では，(2.15)は時間反転の際にスピンも反転するとすればいつでも成立する。

最後に，σ に関するこのような対称性に加えて2分子衝突の運動学から次の結果も導かれる。すなわち

$$|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|=|\boldsymbol{v}_1'-\boldsymbol{v}_2'| \tag{2.16}$$

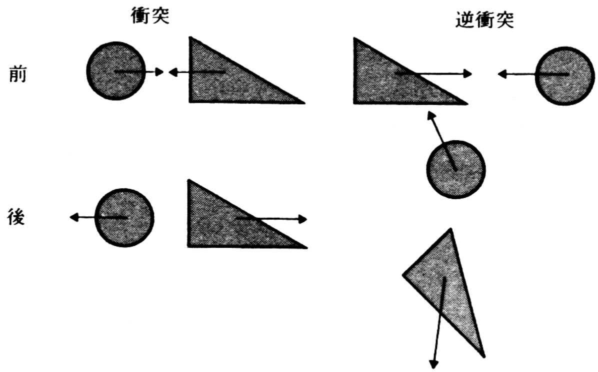


図 2.2　古典的衝突では，可逆性が破られることがある。(左には球とくさびとの衝突を示し，右にはその逆衝突を示す。明らかに逆衝突は大変違ったものである。球形粒子の場合には，付加的な対称性が可逆性を保証している。)

さらに

$$d^3v_1\,d^3v_2 = d^3v_1{}'\,d^3v_2{}' \tag{2.17}$$

が容易に示される。

衝突項 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$ に対する積分表式をいまや書き下すことができる。このためには(2.12)を(2.13)から引き，領域 $d^3q\,d^3v_1$ 内の点の衝突による増加の**正味量**を得る。つぎにこうして得た式を簡単にするために三つの結果(2.15)，(2.16)および(2.17)を用いればよい。すなわち

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \int d^3v_2 \int d\Omega\,\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\,(f_2{}'f_1{}'-f_2f_1) \tag{2.18}$$

が得られる。ボルツマン方程式(2.10)はしたがって次のようになる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla_q+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\nabla_{v_1}\right)f_1 = \int d^3v_1 \int d\Omega\,\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\,(f_2{}'f_1{}'-f_2f_1) \tag{2.19}$$

2.3　*H* 定理

前節において二つのことがわかった。第一に，仮説 A に基づく物理的な議論が提出され，これによって任意の状態から出発した気体が衝突過程の影響の下に，いかにしてつぎつぎと平衡状態に近づいていくかをうまく説明できた。第二に，気体に関する簡単なモデルについての衝突の実際の影響を研究し，仮説 B に基づいて，分布関数に対する微積分運動方程式が導かれた。そこで，

（1） この方程式が実際 $t\to\infty$ において，f がマクスウェル分布(2.9)に近づくことを保証すること。

（2） 仮説 B が正しいこと。

の二つを示すことが残っている。

$\boldsymbol{F}=0$ で，空間的に一様な粒子密度で，容積 V の箱に閉じ込められていれば，平衡の条件 $\partial f_1/\partial t=0$ は

$$\int \mathrm{d}^3 v_2 \int \mathrm{d}\Omega\, \sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\,(f_2' f_1' - f_2 f_1)=0 \tag{2.20}$$

と書ける。(2.20)が満たされるための必要充分条件は

$$f_1 f_2 = f_1' f_2' \tag{2.21}$$

である。物理的にいえば解(2.21)は，平衡においてはすべての衝突過程がその逆過程と正確につり合っていることを表わしている。これは**詳細つり合いの原理**の一例である。

式(2.21)から

$$\log f_1 + \log f_2 = \log f_1' + \log f_2' \tag{2.22}$$

が導かれ，これは衝突によって $\log f_1+\log f_2$ が変化しないことを意味する。したがって $\log f$ は 2 分子衝突の際に保存される運動学的量，すなわち全運動量とエネルギーの線形結合でなければならない。(2.22)の最も一般的な形はそれゆえ

$$\log f = -\beta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)^2 + \log C \tag{2.23}$$

と書ける。ここで，β, C および $\boldsymbol{v}_0$ の成分は任意の定数である。実際これらの定数は気体の巨視的性質のいくつかを定めるものである。特に $\boldsymbol{v}_0$ は気体全体の速度を表わす。静止した箱では $\boldsymbol{v}_0$ は消え，(2.23)は $f\propto\exp(-\beta \boldsymbol{v}^2)$ の形になる。これはちょうど予期されたマクスウェル分布(2.9)である。f が任意の初期状態からこの分布に近づくことを示すために，ボルツマンは

$$H=\int \mathrm{d}^3 v\, f(\boldsymbol{v},\, t)\log f(\boldsymbol{v},\, t) \tag{2.24}$$

で定義される有名な **H 関数**を導入した。マクスウェル分布(2.9)の場合に H が最小になることを示すのは容易であり，これは分子混沌の仮説 B と無関係に真実である。したがって H は平衡からの偏差の尺度を与える。

式(2.24)を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\int \mathrm{d}^3 v\, \frac{\partial f}{\partial t}(1+\log f) \tag{2.25}$$

となる。そこでボルツマン方程式(2.19)を(2.25)に代入することができる。

(2.19)の左辺の第2と第3項がいまの場合0であることを思い出せば，(2.25)は

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\int \mathrm{d}^3v_1\int \mathrm{d}^3v_2\int \mathrm{d}\Omega\,\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\,(f_2'f_1'-f_2f_1)\,(1+\log f_1) \qquad (2.26)$$

を得る。

さて，(2.26)の積分は指標1と2の交換およびダッシュのついた変数とつかない変数の交換をしても不変である〔後者は(2.16)と(2.17)から導かれる〕。(2.26)と同等な四つの式の平均をとれば

$$\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^3v_1\int \mathrm{d}^3v_2\int \mathrm{d}\Omega\,\sigma(\Omega)\,|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|\,[f_2'f_1'-f_2f_1]\,[\log(f_2f_1)-\log(f_2'f_1')] \qquad (2.27)$$

が得られる。(2.27)の被積分は**決して正にならない**。それは二つの角括弧は一緒に符号が変わるからである。実際，一般に次の不等式が存在する：

$$(x-y)\log\frac{y}{x}\leq 0 \qquad (2.28)$$

この等号は $x=y$ のときだけ成立するものであるが，(2.27)においてこれはちょうど平衡の条件(2.21)の等式である。

したがって我々は重要な結果

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\leq 0 \qquad (2.29)$$

を得る。これはボルツマンの H 定理として知られている。すなわち，気体が分子混沌の状態にあるとき，H は減少する。平衡状態において(分子混沌がなくても) H は最小値をとる。H は熱力学におけるエントロピー S と似た性質をもっている。これらはともに一方向きに変化する(S は増大し，H は減少する)。そしてともに平衡状態で極値をとる(熱力学でも，統計力学でも)。実際，(2.23)に現われた定数 β と C とを計算すれば

$$H=-\frac{N}{V}\log(VT^{3/2})+\text{定数} \qquad (2.30)$$

を得る。ここで量 T は粒子1個あたりの平均のエネルギーに比例する。もしも T が気体の温度と同じであることを認めれば，(2.30)はよく知られた理想気体のエントロピーの定義と

$$S=-kHV \qquad (2.31)$$

で結ばれることがわかる。ここで k は比例定数で，ボルツマン定数として知られている。その値は $1.380\times10^{-16}\,\mathrm{erg\,K^{-1}}$ である。

2.4 統計力学

前節では，分子混沌の仮説Bに基づいてボルツマンの H 定理を概観した。この仮説が常に正しいならば，我々の気体のモデルにおいて，H 関数は分子衝突によって初期値から平衡状態の最小値まで減少し続けることが示されたことになる。実際の気体ではこの平衡状態は大変急速に（1秒の数分の1ぐらい）達成されることが期待される。さらにこれは(2.31)による熱力学の第2法則の“導出”を意味することになる。微視的可逆性の原理に基づく解析によって時間に対する非可逆性を示す結果が導かれたのであるから，これはパラドックスと思われたため，次章で考察するところのいわゆる“可逆性反論”が提出された。制限なしの H 定理が正しくないことは明らかである。したがって問題なのは分子混沌の仮説である。

H 定理をよく吟味し，その中の統計的な仮説を（ちょっと見たところむしろ不明確であるが）明らかにすることから，ギブス(Gibbs)によって主につくられた統計力学が形成された[8]。

μ 空間で考えるよりもむしろ箱の中の N 個の粒子の $3N$ 個の位置 q_i と $3N$ 個の運動量を座標とする空間を新たに考える。この**全系**の $6N$ 次元の位相空間は Γ 空間として知られている。読者は μ 空間と Γ 空間とをはっきり区別して，混乱のないようにしなければならない。気体の微視的状態は Γ 空間の**1点**によって完全に指定される。体系の時間的発展につれて，この代表点は動きまわる。その運動はハミルトンの正準運動方程式

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 3N) \tag{2.32}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 3N) \tag{2.33}$$

で与えられる。ここで $\mathcal{H}$ は体系の全ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1,\ \cdots,\ q_{3N};\ p_1,\ \cdots,\ p_{3N})$$

である。

よく知られているように，方程式(2.32)と(2.33)の構造は，ある時刻の $6N$ 個の位置座標と運動量とを定めれば，これを積分して，すべての過去と未来の位置座標と運動量が決定されるようになっている。いいかえれば，任意の時刻における Γ 空間内の代表点の位置を知れば，Γ 空間におけるその軌道は全体にわたって決定される。(2.32)と(2.33)の解は**一義的**なので，Γ 空間内の1点を通る軌道はただ一つだけが可能である。このような軌道は開いて

いるか，あるいは閉じた曲線である。もしも軌道がある点に再び来れば代表点はその点を通る一義的に定まった軌道に沿ってまた動いていかなければならないから，この場合の軌道は閉じた曲線になる。ここで考えている体系は孤立して，完全に弾性的な壁の中にあるから，全エネルギーは運動の定数であり，したがって Γ 空間の $6N$ 個の座標のすべてが独立なわけではない。代表点はエネルギー面とよばれる $6N-1$ 次元の面の上を動く。体系の空間的な広がりは有限なので，この面の体積は有限である。

ギブスの方法の基本は体系の集合（アンサンブル）とよばれるものを導入することである。一般に，巨視的な観測の中には非常に多くの異なった微視的状態が含まれているから，ただ一つの体系を考える代わりに非常に多数の $\mathcal{N}$ 個の同じ体系（コピー）を扱う。各コピーは Γ 空間内に一つの代表点をもつから，全集合は，代表点の雲のような集まりで表わされ，この雲が複雑な運動をするわけである。集合の要素は互いに**相互作用**をしないので，これは物理的というよりもむしろ抽象的なコピーである。このように Γ 空間内の点は全く無関係に動くもので，ふつうの空間内で相互作用をしている N 個の分子の物理的な運動や，それを表わす μ 空間内の点の運動と混同してはならない。このことを注意しながら，Γ 空間内の点の集合を流体として扱うことに話を進めよう。この流体を記述するのに，μ 空間での分布関数と類似した，代表点の密度 ρ を導入する。すなわち

$$\rho=\rho(q_1,\ \cdots,\ q_{3N};\ p_1,\ \cdots,\ p_{3N},\ t) \tag{2.34}$$

ρ は，一般に Γ 空間内の位置と時間の関数である。(2.34)の右辺を略して $\rho(q,\ p,\ t)$ と書く。全空間にわたって，これを積分すれば点の総数 $\mathcal{N}$ になる。したがって

$$\mathcal{N}=\int\cdots\int\rho(q,\ p,\ t)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.35}$$

$\mathcal{N}$ は極めて大きく，そのため ρ の変化は連続的であるとしてよいものとする。

座標 q と p の任意の関数 $M(q,\ p)$（位相関数という）の**平均**を時刻 t においてその集合についてとれば

$$\overline{M}(q,\ p)=\mathcal{N}^{-1}\int\cdots\int M(q,\ p)\,\rho(q,\ p,\ t)\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.36}$$

となる〔1本の横棒(—)は常に集合平均を表わすものとする〕。ρ を1に規格化するほうが便利であり，このためには(2.36)で $\mathcal{N}$ を1で置き換えればよい。このとき，ρ は集合から一つの点を取り出すときの**確率密度**と考えなけ

ればならない。(2.36)はこの場合，次式で置き換えられる：

$$\overline{M}(q,\ p)=\int\cdots\int M(q,\ p)\ \rho(q,\ p,\ t)\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \qquad (2.37)$$

点の数 $\mathfrak{N}$ は仮説により一定なので，その集合は連続方程式に従う流体と考えることができる。これは(2.5)に似た形で

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla_{6N}\cdot(\boldsymbol{v}\rho)=0 \qquad (2.38)$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{v}$ は $6N$ 次元の速度ベクトル

$$\boldsymbol{v}\equiv(\dot{q}_1,\ \cdots,\ \dot{q}_{3N};\ \dot{p}_1,\ \cdots,\ \dot{p}_{3N})$$

であり，∇_{6N} は $6N$ 次元の勾配

$$\nabla_{6N}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial q_1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial q_{3N}};\ \frac{\partial}{\partial p_1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial p_{3N}}\right)$$

であって，これらはふつうの3次元空間の量と全く類似したものである。

式(2.38)の第2項を展開すると

$$\nabla_{6N}(\boldsymbol{v}\rho)=\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\sum_{i=1}^{3N}\rho\left(\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right) \qquad (2.39)$$

となる。運動方程式(2.32)，(2.33)を用いれば(2.39)の右辺は簡単化される。第1項は明らかに

$$\sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}-\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\right\}$$

であり，これはふつう $\{\rho,\ \mathcal{H}\}$ と略記して，ポアソン括弧式という。第2項は(2.32)と(2.33)とを微分して得られる関係式

$$\sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right\}=0$$

のために消える。したがって(2.38)と(2.39)から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\{\rho,\ \mathcal{H}\}=0 \qquad (2.40)$$

を得る。ρ の**全微分**を $q,\ p,\ t$ の全変数について考えると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3N}\left(\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

であるから，(2.40)は

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (2.41)$$

に帰着する。

この基礎的な結果はリウヴィル(Liouville)の定理として知られていて，

q, p の正準変換に対して不変である。物理的にいえば，Γ 空間内の任意の代表点は流体として動いていくが，その点の付近の密度は不変である（Γ 空間内の固定点における密度は一般に不変ではない）。すなわち，代表点の集合は縮まない流体のように運動する。

統計的平衡状態にあるという特別な性質をもった代表点の集合の特別な分布が存在する。これは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{2.42}$$

（定常な集合）のとき起こる。これは(2.40)による要請

$$\{\rho, \mathcal{H}\}=0 \tag{2.43}$$

と等価である。この条件は ρ が運動の定数の任意の関数であるときに満たされる。定常な集合の一つの簡単な例に**一様な集合**

$$\rho=\text{一定} \tag{2.44}$$

があり，これは代表点が Γ 空間内で一様に分布した場合である。(2.42)から直ちにわかるように，この分布は時間がたっても変わらず，また正準変換に対しても不変である。

もう一つの重要な例は，前出の閉じた箱の中の気体のように孤立した保存系に対して適用できるものである。この場合，全エネルギー $\mathcal{H}(q, p)=E$ は運動の定数であるから，ρ を E の任意の関数とすれば，この分布もいつでも平衡（定常状態）にある〔読者はこの議論と μ 空間での関数 f の式(2.9)に導いた議論とがよく似ていることに気づかれたであろう〕。このような関数の一つは

$$\rho(E)=\begin{cases}\text{一定} & (E \text{ と } E+\delta E \text{ の間の領域})\\ 0 & (\text{その他の領域})\end{cases} \tag{2.45}$$

である。(2.45)の分布はミクロカノニカル集合として知られている。これはエネルギー面にわたってだけ一様な密度で分布した代表点の集合である。そこにエネルギー E の測定の自然的な誤差 δE があるとすれば，この面は本当は代表点で一様に満たされた殻であるわけである。ミクロカノニカル集合が定常である理由は，一様な集合からこの殻の外の点をすべて除いて考えれば明らかである。どの代表点もエネルギーの一定の面を横切ることは決してできないから，このような除去をしても殻の中の点の（平衡）分布には影響しない。統計的に平衡している集合はそれ自身が平衡状態にある体系を表わすものとして重要である。

集合が一つの物理的体系の振る舞いを扱うのに都合がよいのは，体系に対する観測には有限の時間が必要であり，さらにその時間は微視的な過程の時間に比べて非常に長いからである。もしも，一つの体系の振る舞いの無限に長い時間に対する平均が平衡状態の振る舞いと同じであるというときには，体系はほとんどすべての時刻に平衡状態にあるはずであり，したがって体系はどのような非平衡状態からでもすぐに平衡状態にもどらなければならないだろう(2.2節では気体の平衡状態を**最も確からしい**状態であると考えたが，ここではそれを**平均**の状態であるとして扱っている)。これが H 定理を証明するのと同等であることは次の理由による。H 定理は気体の非平衡状態がまもなく平衡状態へ移り，そこにとどまることを予言する。したがって，気体の無限時間に対する平均の状態はやはり平衡状態なのである。

この問題はボルツマンによって研究された。彼は位相関数 $M(q, p)$ の平均すなわち

$$\hat{M}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}M(q, p)\mathrm{d}t \tag{2.46}$$

で定義される平均を計算する代わりに，よりやさしいミクロカノニカル集合に対する平均，つまり(2.36)で定義される $\overline{M}$ をとった。二つの平均 $\hat{M}$ と $\overline{M}$ とが等しいことを，彼は仮説に求めた。これは**エルゴード仮説**とよばれ，

一つの代表点の軌道は結局，エネルギー面上のすべての点を通る。(C)

という仮説である。

仮説Cが真実ならば，時間平均と集合平均とが等しいことになるというのは次のように考えられる。すでに述べたように，Γ 空間で任意の1点を通る軌道はただ一つである。したがって，**一つの**軌道が(仮説Cで仮定されたように)**すべての**点を通るならば，可能な軌道はただ一つしかない。したがって**すべての**体系は Γ 空間の同じ軌道を通る。なぜならば，ある所定の時刻に代表点がエネルギー面上のどこにあったとしても，それはこのただ一つの軌道上にあるわけで，決まった点を通るのはただ時間の問題である。したがって，位相関数の平均を無限時間にわたってとったものは集合内の $\mathcal{N}$ 個の体系のどれに対しても同じであることは明らかである。すなわち，この平均を求めるのに実際の軌道を知る必要はない。ゆえに，時間平均は集合に対して平均しても変わらない。すなわち $\overline{M}=\overline{\hat{M}}$ となる。しかし平均の順序は重要でないから $\hat{M}$ は $\hat{\overline{M}}$(集合平均の時間平均)と等しくなければならない。最後に，ミクロカノニカル集合は定常であることを考えれば，後者における

時間平均は皮相的なもので，$\overline{\hat{M}}$ は $\hat{M}$ で置き換えることができる。こうして $\overline{M}=\hat{M}$ が証明された。

エルゴード仮説を用いれば，代表点がエネルギー面の各場所にある相対的な時間について，もう少しはっきりさせることができる。ある体積内に滞在する時間はその体積に比例する。いいかえれば，同じ体積には同じ時間だけ代表点は滞在する。

このエルゴード仮説 C がもしも正しいならば，他の統計的仮説なしに，一つの体系の記述に代表点の集合を用いてよいという厳密な力学的根拠となる。しかし残念なことに，ここに述べた形ではこれは正しくはない。なぜならば軌道の点は測度(measure)ゼロの集合であり，したがって，それは測度がゼロでないエネルギー面を満たすことはできないからである。しかし仮説 C が誤りであることが認められたとき，それでもほとんどすべての物理体系は**準エルゴード仮説**を満たすであろうと期待された。この仮説は代表点はエネルギー面をどこでも密におおうことだけ，すなわち任意の点の任意の近傍を通ることだけを主張するものである。実際，バーコフ(Birkov)[9] とフォン・ノイマン(von Neumann)[10] はある種類の体系では時間平均と集合平均とが等しいことを示した。しかし，現実的な体系に対するこの性質の一般的証明はなされていない。しかも，たとえばなめらかな面をもつ立方体の中の粒子の集合が固定面の一つに垂直に運動している場合のような，明らかに非エルゴード的な理想的なモデルも容易につくれる。この場合，粒子は永遠に跳ね返って往復するだけで，代表点は全エネルギー面の極く小さな部分に閉じ込められていることになる。したがって，このような体系の時間平均が集合平均と全く異なることは明らかである。

いかにエルゴード仮説が魅力的であるにしても，このような困難のため，何らかの統計的仮説の導入は避けられないと思われる(たとえば，実際の測定は短い有限な時間を必要とするだけであるから，我々は時間平均に本当の興味があるわけではないともいえる)。そこで著者によっては，統計力学の正当性を次のような大胆な統計的仮説におき，これを統計力学の基礎的仮説としている:

平衡系に対し，他の制限がなければ，代表点は $\boldsymbol{\Gamma}$ 空間の等しい体積内には同じ頻度で見出される。　(D)

この仮説 D の述べ方は等**アプリオリ**確率(等重率)の仮説として知られて

いる。これは，与えられた一つの体系に対する測定を繰り返せば，一様な集合平均から予期されるものと同じ結果になる，ということである〔(2.44)参照〕。個々の体系の長時間の振る舞いについては何も主張していない。個々の体系は平均と大きく違った状態にもありうる。場合によっては，体系に対する部分的な知識をもつこともある。たとえば，孤立した箱の中の気体では(おそらく近似的にすぎないが)全エネルギーがわかっている。この場合，仮説 D によって体系に対する部分的な知識をできるだけ満足するような集団分布を構成しなければならない(孤立系の場合，ミクロカノニカル集合をとることになる)。

仮説 D の正当性に関して次のことを注意しておこう。ハミルトン運動方程式によれば代表点が Γ 空間の一部分に集まるようなことはないから，もしも空間の場所によって確率が**等しくしない**ならば，そのための証明が必要である。さらに Γ 空間の体積は正準変換によって変わらないから，仮説 D はすべての正準座標系について正当である。最後に，D のような統計的な仮説は力学法則からは導かれないが，これと矛盾するものではない。

それ自身が平衡にない体系を扱うときは，基礎的仮説 D に従って構成された非定常な集団で表わさなければならないだろう。これは，ボルツマンによる 1 個の体系に対する無制約な H 定理のときの反対がもう生じないような，**一般化された H 定理**への道を開くものである。

2.5 一般化された $\overline{H}$ 定理

2.4 節で述べたように，平衡状態にある体系に対する位相関数 $M(q, p)$ の平均を計算するのに定常なミクロカノニカル集合を用いることができる。もしも体系が平衡状態にないことがわかっているならば，その代わりに時間的に変化し，ミクロカノニカル集合へ漸近的に近づく集合を用いて記述することができるだろう。μ 空間での H 関数と類似的に，Γ 空間の関数 σ を

$$\sigma=\int\cdots\int\rho\log\rho\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.47}$$

で定義すれば，ミクロカノニカル集合は σ を最小にすることが容易に示される。一方で(2.47)を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=\int\cdots\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\{1+\log\rho\}\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.48}$$

となり，右辺はリウヴィルの定理(2.41)によって消えることがわかる。すな

わち

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (2.49)$$

であり，したがって σ は平衡へと向けて進む非対称な傾向を**含まない**。

非対称性をもつ量は P. および T. エーレンフェスト(Ehrenfest)[12] により，**粗分割**の概念を用いて導入された。Γ 空間における代表点の正確な位置づけはできない。なぜならば，正確な位置づけは体系の完全に微視的な知識を意味するからである。我々の巨視的な知識は μ 空間における分布関数 $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ に含まれている。これは μ 空間内の i 番目の細胞(celll)の各々に含まれる点の数 n_i で規定される。数の集合 $\{n_i\}$ の各々に対し，これに相当する Γ 空間の有限領域 Λ がある。これを**スター**(star)とよぼう。μ 空間の一つの細胞の中の多数の点は体系の巨視状態を変えることなくその細胞の中で動きまわったり，入れ替わったりできるのでスターは有限の体積を占める。もちろん異なる巨視状態には異なった体積のスターが対応する。仮説により，巨視的観測が代表点の位置づけをするときの最大の精度はそれがあるスターの中にあるということである。代表点は，ある有限な滞在時間の後に一つのスターから他のスターへと移っていく。

スターの概念を導入したので，ここで粗分割密度 P（大文字のギリシヤ文字ロー）を

$$P=[W(\Lambda)]^{-1}\int\cdots\int_{\Lambda}\rho\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \qquad (2.50)$$

によって定義する。ここで $W(\Lambda)$ はスター Λ の体積である。これに対して ρ を細分割(fine-grained)密度，σ を細分割 H 関数とよぼう。P は細分割密度をスター Λ 内で平均したものである。スターの体積は 1 に規格化してある。$\bar{H}$ で表わす粗分割 H 関数もあり，これは

$$\bar{H}=\int\cdots\int P\log P\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \qquad (2.51)$$

で定義される。与えられたスター内で $\log P$ は一定であるから，(2.51)の右辺は

$$\int\cdots\int\rho\log P\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \qquad (2.52)$$

で置き換えることができ，したがって $\bar{H}$ は $\log P$ を(2.37)の形で集団に対して平均したものと考えることもできる。$\bar{H}$ は σ と同様に，ミクロカノニカル集合の場合に最小になる。

いま，ある孤立系に対しある時間 t_1 に巨視的観測がなされ，このときの状態に対応する代表点の集団がつくられたとしよう。等**アプリオリ**確率の仮説Dにより，精分割密度 ρ はエネルギー面上のこの観測に合った領域内では一様で，この外ではゼロであるように選ばれる。この場合，明らかに $P=\rho$ であり，$t=t_1$ における $\bar{H}$ は

$$\bar{H}_1=\int\cdots\int\rho_1\log\rho_1\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.53}$$

である。

もしも $t=t_1$ で平衡状態ならば，時間がたっても等式 $P=\rho$ は不変で，したがって $\bar{H}$ も変わらず，これは(2.49)の結果と一致する。もしも平衡状態でなければ，後の時刻 t_2 においては P と ρ とはもはや等しくなく，ρ はより一様な新しい分布(時刻 t_1 において，ρ はある領域では一定，その他ではゼロであったことを思い出してほしい。また3.1節参照)へ発展していくであろう。この後の時刻における $\bar{H}$ の値は(2.52)により

$$\bar{H}_2=\int\cdots\int\rho_2\log P_2\,\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.54}$$

である。t_1 から t_2 の間の $\bar{H}$ の変化は(2.53)から(2.54)を引いて

$$\bar{H}_1-\bar{H}_2=\int\cdots\int\{\rho_1\log\rho_1-\rho_2\log P_2\}\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.55}$$

となる。

さて，等式(2.49)により，(2.55)の被積分において $\rho_1\log\rho_1$ は $\rho_2\log\rho_2$ で置き換えてもよい。さらに，量 $P_2-\rho_2$ は $\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N}$ で積分すれば消えるから，これを積分に付け加えてもよい。最終的に

$$\bar{H}_2-\bar{H}_1=\int\cdots\int\left\{\rho_2\log\frac{\rho_2}{P_2}+P_2-\rho_2\right\}\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}p_{3N} \tag{2.56}$$

となる。(2.56)の積分は $P_2=\rho_2$ の場合(このときは積分はゼロ)を除き，常に正である。したがって平衡の場合を除き

$$\bar{H}_1>\bar{H}_2 \tag{2.57}$$

である。(2.57)は1個の体系の H 定理(2.29)と類似の Γ 空間の H 定理である。次の章において，AからDまでの種々の仮説の性質と関係を吟味し，またこの章で述べた種々の定理の正当性を明らかにする。

2.6 エントロピーの意味

ボルツマンの H 関数をエントロピーの符号を変えたものと同一視するこ

と，すなわち(2.31)は熱力学的な定義よりもずっと広い理解をエントロピーに与えることになった。すでに述べたように，任意の状態から出発して，**より確からしい**状態へと分子が再配列することによって平衡が達せられる。最も確からしい巨視的状態は，微視状態が最大の数であるようなものであるが，これはまた最大のエントロピーをもつものでもある。実際，詳しく調べることによって関係式

$$S = k \log G + \text{定数} \tag{2.58}$$

が示される。ここで，G はエントロピー S の与えられた巨視状態に含まれる微視状態の総数(これは分子をでたらめに“振り混ぜた”ときにその巨視状態に達する確率)である。G は細胞 i を占める分子の数 n_i の集合と関係づけられる。さらに確率 G はふつうの確率同様に掛け合わされる性質のものであり，(2.58)に対数記号があるのは，エントロピー S が加算量であることを示している。

微視状態の“振り混ぜ”(shuffling) を続けると平衡に達するということから，エントロピー最大の状態は最も“振り混ぜた”状態であることが期待される。いいかえれば，混沌状態は，構造をもち秩序のある状態よりも確からしい(この注意は重力のある体系の場合にはそのままではあてはまらない。4.7 節参照)。熱力学には，この主張を支持するような，よく知られた例が数多く存在する。たとえば，一つの箱の中の二つの異なる気体を分ける壁を取り除けば，箱の中のどこでも一様に混合した平衡状態がたちまち達成される。(2.58)の解釈は非熱力学的体系への適用も可能である。気体の分子の代わりに色の違う巨視的な弾性球で上の実験を行なっても，体系のエントロピーは同様に定義され，同様の“混合”が達せられることになる。

エントロピーの増加が，上で見たように，構造の解体と同じとするならば，我々はエントロピーと**情報**を結びつける重要な関係に到達する。より秩序ある状態を巨視的に規定するにはより多くの情報が必要である(N 個の粒子の微視状態を規定するには，それが巨視的構造をもとうが，もつまいが，いつも $6N$ 個のパラメタが必要であるだけだが)。したがって構造がなくなることは情報が減ることを意味する。そこで情報を**負エントロピー**とする解釈に導かれる。

いまこの点を詳しく考えるため，一般的に，可能な出来事の数が p_0 であるとしよう。何も情報がなければ，各出来事は同様に起こるわけである。しかし何らかの情報があれば，選択の数を p_0 よりも小さい $p\,(p<p_0)$ に減らす

ことができる場合もある。この場合，情報の量 ΔI は

$$\Delta I = k\log(p_0/p) = -k\log p + \text{定数} \tag{2.59}$$

によって定義される。ここで k はある定数である。物理的な適用の場合は，k はふつうボルツマン定数 $\sim 10^{-16}\,\mathrm{eng\,K^{-1}}$ とする。k が小さいのは“日常的な”体系は膨大な情報を含むことを示している。箱の中の気体に対して方程式(2.58)と(2.59)とを比べれば，情報と負エントロピーとの関係が見出される。定数は適当にとれば正確な式として

$$\Delta I = -\Delta S \tag{2.60}$$

を得る。ここで $-\Delta S$ は情報 ΔI を加えたために気体のエントロピーが**失われた量**である。

実際的な例により，ネゲントロピー(negentropy. 負エントロピー)と情報とが互いに移り変わるものであることを示し，方程式(2.60)の意味を明らかにしよう。フラスコの中の気体の状態を少し詳しく知りたいとしよう。可能な方法の一つは，気体に光束を当てその散乱や屈折を調べることであろう。この情報のために支払わなければならないのは，エントロピーの小さな光の一部が気体に吸収されて熱になる不可避的な変化である。これは

負エントロピー ⟶ 情報

の例である。逆に，気体の分子がすべて短時間の間，フラスコの一方の半分にあることがわかっていれば，この時間内に壁を挿入して気体を小さな体積にずっと閉じ込め，エントロピーをこうして減らすことが可能である。したがって

情報 ⟶ 負エントロピー

は物理的体系に対して**干渉すること**と考えられる。

物理的体系に観測を行なえば，何らかの乱れを与える(量子論的観測理論に関する 6.3 節参照)のは一般原理である。たとえば，気体の温度を知るために温度計を挿入すれば，気体の熱平衡を乱すことになる。情報の獲得は，常に小さいがしかし有限の負エントロピーの代償としてなされる。このことはブリユアン(Brillouin)[13] による“情報の負エントロピー原理”として述べられている。これによれば，情報の取得 ΔI は体系のエントロピーの増加 ΔS を伴い，

$$\Delta S \geq \Delta I \tag{2.61}$$

である。

この原理は，充分機敏な活動によって熱力学の第 2 法則を破ろうとする超

能力の可能性を否定するものである。これは個々の分子を調べて区分けすることができる微視的大きさの仮想的生物(有名なマクスウェルの魔物)として考えられたものである。もしも気体を満たす箱を半分に仕切るついたての穴の近くにこのような生物がいるならば，分子を一方の向きにだけ通すとか，速い分子を一方の向きに，遅い分子を逆向きに通すようにシャッターを操作することができる。こうすれば分子を再配列して箱の両半分の間に圧力差，あるいは温度差をつくるので，体系のエントロピーは減少する。

長い年月の間，マクスウェルの魔物は議論の対象であった。しかし最後にシラード(Szilard)[15]とブリユアン(Brillouin)[13]とにより，マクスウェルの魔物が働いても，減少させたエントロピーと少なくとも同じだけのエントロピーをつくりだすことが示された。シャッターを適宜な瞬間に操作するには魔物は彼の近くの分子の位置と速度を知らなければならない。この情報を得るためには，たとえば光を当てるなどして，分子の運動をいくらか乱さなければならない。これは容器の熱平衡を壊し，そのため全エントロピーの増加を来たすのである。不等式(2.61)は，この後者のエントロピー増加は魔物がエントロピーを減らすために得る情報に少なくとも等しいものであることを示している。

日常の経験は，情報が常に時間と共に増大することを示している。我々が存在する限り記憶は増加し，公共図書館は本を集め，月は隕石の衝突によってクレーターが増える。出来事や事件が残す痕跡が宇宙の局所的な情報の量を増やす(したがってエントロピーを減らす)が，これは宇宙全体のエントロピーの増加によってのみ可能であることを知れば，情報とエントロピーが同時増加することは決して矛盾ではない。

参考文献

1. たとえば, I. Prigogine: *Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Intersience, New York, 1962).
2. R. Clausius: Phil. Mag. **14** (1857) 108; **40** (1870) 122.
3. J. C. Maxwell: Phil. Mag. **19** (1860) 19; **20** (1860) 21; Phil. Trans. Ray. Soc. **157** (1867) 49. W. D. Niven (ed.): *The Scientific Papers of James Clevk Maxwell* (Dover, New York, 1965)にリプリントされている。
4. L. Boltzmann: Wiem. Ber. **53** (1866) 195; **63** (1871) 397; **66** (1872) 275; *Lectures on Gas Theory* 1896—1898 [英訳 S. G. Brush] (Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964).

5. たとえば, K. Huang: *Statistical Mechanics*(Wiley, New York, 1966) p. 82.
6. K. Huang: 上掲 5, p. 64 に明白な説明がなされている。
7. R. C. Tolman: *The Principles of Statistical Mechanics* (Oxford Univ. Press, London, 1938) sec. 41, 42.
8. J. W. Gibbs: *Elementary Principles in Statistical Mechanics*(Yale Univ. Press, New Haven, 1902); *The Collected Works of J. W. Gibbs* (Yale Univ. Press, New Haven, 1948) vol. 1, 2.
9. G. D. Birkhoff: Proc. Nat. Acad. 17(1931) 650, 656.
10. J. von Neumann: Proc. Nat. Acad. 18(1932) 70, 263.
11. R. C. Tolman: 上掲 7, chap. 3.
12. P. and T. Ehrenfest: *The Conceptual Foundatins of the Statistical Approach in Mechanics* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1959).
13. L. Brillouin: J. Appl. Phys. 22(1951) 334.
14. J. C. Maxwell: *Theory of Heat* (Longmans, Green & Co., London, 1908) p. 338.
15. L. Szilard: Z. Phys. 53(1929) 840.

より進んだ読者には

1. I. E. Farquar: *Ergodic Theory in Statistical Mechanics*(Interscience, London, 1964).
2. D. ter Haar: *Elements of Statistical Mechanics*(Oxford Univ. Press, London, 1938).
3. J. H. Jeans: *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases*(Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1940).
4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *Statistical Physics* (Pergamon Press, London, 1958).
5. R. C. Tolman: *The Principles of Statistical Mechanics*(Oxford Univ. Press, London, 1938).
6. C. E. Shannon and W. Weaver: *The Mathematical Theory of Communication* (Univ. of Illinois Press, Urbana, 1949). R. M. Lewis: Science 71 (1930) 569.

3

可逆性反論

3.1 孤立系の対称性

2.3 節において，(2.24) で定義される H 関数は，時間的に減少を続けて最小値に達し，このとき気体はマクスウェルの速度分布をもつ平衡状態にある，というボルツマンの有名な証明を述べた。しかしこの証明は衝突回数仮説，いいかえれば分子混沌の仮説 B，に基づいている。この H 定理に対するいくつかの反論とその基礎にある仮説について，ここで考えてみよう。

H 定理はその基となっている微視的可逆性の原理(2.14)と矛盾するから正しいはずはない，ということがロシュミット(Loschmidt)[1] によって指摘された。一つ一つの衝突は可逆的なのだから，H を減少させるような粒子運動は，そのすべての粒子の速度を同時に反転させれば，H を増大させるような粒子運動になるだろう。この"時間反転"系はそのとき，一連の状態を逆にたどって元にもどるので，H はどちらの場合にも減少することはできないことになる。

無制約な H 定理に対する第二の反論はツェルメロ(Zermelo)[2] によるもので，ポアンカレ(Poincaré)[3] の定理に基づいている。ポアンカレの**回帰定理**として知られているのは，一つの孤立系では**どんな**状態にも任意の近さまで無限に多くの回数もどることができる，というものである。この回帰の時間間隔は**回帰時間**とよばれ，それは巨視的系ではとても永い($10^{10^{23}}$ 秒程度)ものである。

けれども，**いつかは**極めて低いエントロピー状態も起こることは明らかであって，そんなとき H は増大しているはずである。

ポアンカレの回帰定理は次のように証明される。Γ 空間での代表点の集合は一定断面積の管に沿って動いている。エネルギーが限られた有限系では，代表点は Γ 空間の有限体積の中に限定され，管の全体積も有限である。図3.1で，領域 A の未来にあたる管の部分を考え，その体積を Ω_A とする。A は時間 t の後に B へ展開しているので，Ω_A は領域 B の未来のすべての点を含んでいる。領域 B の未来管の体積を Ω_B としよう。Ω_A が代表点で満たされているとすると，このすべての点は時間 t の後には Ω_B の中にある*。しかし Ω_A は Ω_B を含むので，このことから $\Omega_A=\Omega_B$ が要求される。したがって，A と B とを含む AB 間の領域(これは確かに Ω_A の中にある)は Ω_B の中にもあるはずである。それで B の未来管は A の中のすべての点(測度ゼロの集合を除く)を含むことになる。もし領域 A が B の過去の中にも未来の中にもあるならば，A の中の一点は充分長い時間の後には A にもどるはずである。A は任意に小さくとれるので，どんな状態も任意の精度で回帰される。この論法は無限回繰り返すことができる。

さてそこで，エントロピーは増大(H は減少)するだけだというのを明示している H 定理が，可逆性や回帰性に基づく上記の指摘と融和できるかど

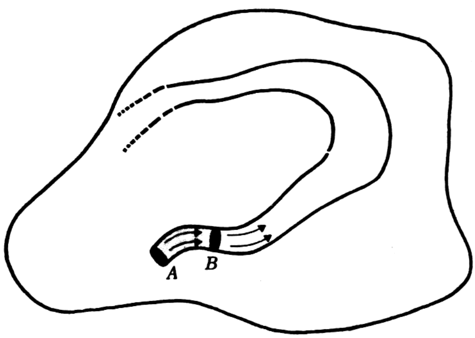


図 3.1　ポアンカレの回帰定理 (影をつけた AB 間から代表点が流れ出るにつれて，A 領域の未来管は B 領域の未来管の中へ展開してゆく。A の未来のすべての点が B の未来のすべての点になるので，A と B は同じ未来管をもつはずである。したがって，影の領域は B の過去にあったと同様に未来にもまたあるはずである。これは，A の中の点は常に A にもどることを意味している。)

* リウヴィルの定理により，代表点の密度は時間がたっても変わらない。

うかを調べよう。H 定理は分子混沌の仮説 B に基づいていて，それは時間について非対称になっていたことは容易にわかる。第 2 章で，この仮説は次のような意味に解釈されたことを思い起こそう。すなわち，未来に起こる衝突はいままさに衝突しようとしている粒子の振る舞いに影響できないと考え，したがって，衝突する粒子の相互の位置と速度は衝突前には相関がないとする。この“前”と“後”(このとき粒子には相関がある)の区別が，時間の中での明らかに一方的なエントロピー増加を起こしている。

分子混沌の仮説の正確な物理的意味は明らかではない。それは(2.12)の中に現われていたもので，これによってある種の粒子の衝突数を分布関数の積として表わすことができた。しかし，この仮説は分布関数の形を制約するものではなく，どんな特殊な f でも選ぶことができて，それに分子混沌をつけ加えることができる。2.3 節の H 定理の取り扱いでは，H が減少してゆく時間の各点で仮説 B に基づいていたが，これはありえないことである。というのは，このような仮説の状況では力学の法則に反するような分布関数をつくることが容易に示せるからである[4]。たとえば，ある体系 I をとって，それが単調減衰の H 曲線(図 3.2 の実線)に沿い，時刻 $t_1, t_2, t_3, \cdots$ で一連の状態 $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots$ を通過してゆくとしよう。そこで状態 $\bar{\psi}_2$ にあるもう一つの系 II を考えよう。ここで $\bar{\psi}_2$ はすべての分子速度が逆転していること以外は ψ_2 と全く同じものであるとする。ψ_2 に対する分布関数を速度の大き

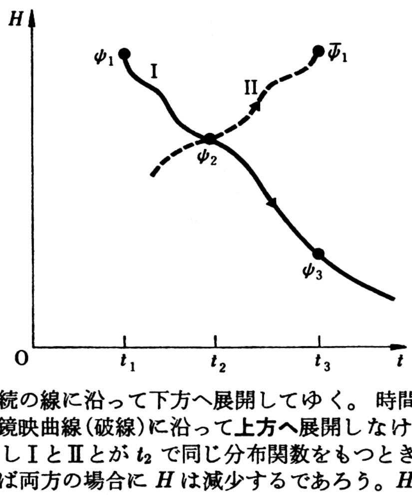


図 3.2 系 I は連続の線に沿って下方へ展開してゆく。時間反転系 II はそこで鏡映曲線(破線)に沿って**上方へ**展開しなければならない。もし I と II とが t_2 で同じ分布関数をもつときは，H 定理によれば両方の場合に H は減少するであろう。H 定理は成立しない。すなわち，t_2 で子分混沌はありえないのである。

さのみに依存するように選ぶと，$f=f(|v|)$で，そのとき ϕ_2 と $\bar{\phi}_2$ は同じ分布関数をもち，したがって同じ H となる。もし分子混沌を ϕ_2 と $\bar{\phi}_2$ に課すると，H 定理によれば，H はⅠとⅡの**両方**の系でひきつづき減少することが要求される。ところが他方では，系Ⅱは系Ⅰの時刻 t_2 での時間反転状態であって，その後はⅡはⅠの一連の状態を反対方向($t<t_2$)にたどって展開する，すなわち図3.2の実線を逆に ϕ_1 のほうに向かってゆく。力学の法則によればこのとき系Ⅱのエントロピーは**増加**する。したがって，H が局所的**極大**(エントロピー極小)にあるときのみ分子混沌は可能であることがわかる。この場合のみ，分子混沌の仮説は力学の法則と共存できる。

分子混沌は H の値のピークに対応する瞬間にだけ正しいので，孤立系の平衡への連続的な動きを証明するのに H 定理を使うことはできない。仮説Bがある瞬間に有効であるとしても，分子衝突によって衝突粒子間に相関関係が生じるので，分子混沌は直ちに破れてしまうであろう。したがって，せいぜい無限小時間の後の $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t<0$ がいえるだけである。

こうして，H 定理と粒子運動の時間可逆性とを融和させることができる。もし気体が時刻 t_0 で分子混沌の状態にあるなら，H 定理によれば $t_0+\epsilon\,(\epsilon\to 0)$ で $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t<0$ である。しかし，それ以前の時刻 $t<t_0$ での H の値も計算できる。議論は完全に対称的なので，もちろん，$t_0-\epsilon$ では $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t>0$ である(図3.3)。

孤立系のエントロピーの長時間にわたる様相を図3.4に描いてあるが，曲線は極大エントロピーの平衡状態のまわりの極めて小さな**揺らぎ**の継続を示している。時折は大きな揺らぎが起こって，ポアンカレの回帰定理のように

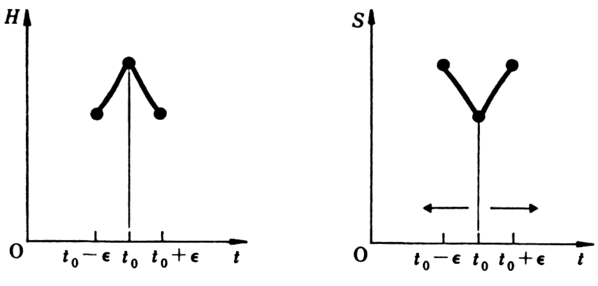


図 3.3 明らかに時間対称な H 定理 (左図で分子混沌は，H が時間の両方向に減少するような局所的ピークでのみ有効である。右図はそれに対応するエントロピー極小である。ボルツマン方程式は，t_0 から**遠ざかる**どちらの時間の向きの分枝にも適用できる。)

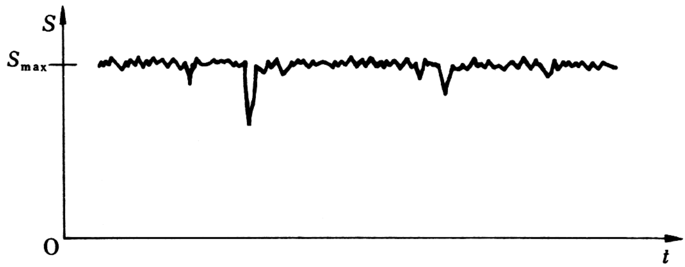


図 3.4 孤立系の長時間にわたってのエントロピーの様子 (大きな揺らぎに比べて小さな揺らぎが圧倒的に多い。明らかに系は時間の中での方向づけをもたない。)

系はある低いエントロピー状態へ帰っている。分子混沌はこのような揺らぎの底のところに適用される。我々の立場からこの図の最も重要な点は，時間的な方向は全く存在しないということで，すべての揺らぎは上下両面をもっている。これは時間の増大方向を水平軸のどちらにとってもいえることで，エントロピー減少はエントロピー増大と同じように起こっている。これから，孤立した箱の中の気体は**時間の中の非対称をもちえない**ことが結論される。

上の注意からまた，このような系の本当の“平衡”状態はありえないことも明らかである。我々が平衡とよんだ状態は最も頻繁に起こる状態にすぎなくて，平衡状態のふつうの基準を満たしてはいない。いつかは(大きな揺らぎは途方もなく長い時間の後にのみ認められるものではあろうが)系はその状態から離れうるためである。この理由で，本書での平衡や非可逆性についてのすべての表現は，ポアンカレの回帰時間に比べて充分短い時間の尺度の上での意味とする。

3.2 再び一般化された $\bar{H}$ 定理について

可逆性からの反論によって2.3節の無制約な H 定理の使用は制限されたが，一般化された $\bar{H}$ 定理のほうはそのままである。こちらは分子混沌がいつも有効であるという間違った仮説によるのではなくて，初期の瞬間での等**アプリオリ**確率という仮説 D に基づいている。この仮説は一つの瞬間だけに用いられているので，それは運動の可逆的な方程式と矛盾しない。[仮説 B と D とは，一つの瞬間では一様な気体に対しては等価である。] $\bar{H}$ の減少は，ρ や P は当初は等しいと仮定しても後の時間には等しくはないとい

う事実に基づいている。$\bar{H}$ がミクロカノニカル集合に対応する極小値に至るまで減少をつづけるだろうということは，(全くの証明抜きではあるが)極めて妥当であると思われる。

このことがどんなものかをみるために，問題にしている系の代表点は観測されるその巨視状態に対応して，Γ 空間のある有限領域にあることがわかっているとしよう。すなわち点がどこにあるかについてのある不確定さがある。したがって，過去にどこにあったか，また未来にどこにあるであろうかについても同様な不確定がある。2.4節でリウヴィルの定理を証明したが，それは

> 領域が代表点で満たされているなら，それらの点は Γ 空間中の一定断面積の管に沿って動くであろう。

というものであった。その結果，とりあげている単一系の代表点の位置に関する不確定さ，つまりその系の状態についての不確定さも一定の範囲内であると思われるかも知れない。なぜなら，領域の中で実際の位置の充分近くに選んだ点はやはり管の中にとどまっているであろうからである。

しかし，管の断面積の形については何も述べてはいなかった。実際には，現実の系の中で起きる衝突の数が極めて大きいので，小さな初期条件の違いでも二つの系の軌跡は大きく隔たり，Γ 空間中で最初近接していた2点もすぐに遠く離れるであろう。したがって，問題とする点のまわりの小さな球形の超空間の動きを追ってみると，管は球形の断面積を保たず急速にその形を変え，最初近傍にあった点が互いに離れてゆくにつれて，フィラメント状の網の形が成長してゆく。この状況は図3.5に描かれているように，領域 A の中の点が B ではフィラメント構造に広がってゆくが，A と B との全体積はリウヴィルの定理によって一定である。これらのフィラメントはエネルギー面の全体にわたって成長して，だんだんと一様になり，系が平衡に近づくにつれてミクロカノニカル集合に収束する。

この議論と巨視的記述の非対称性との関係はもう明らかである。点の本当の位置は領域 A の中の P であるが，そこから少し離れた Q であるかも知れないと考えられたとしよう。ある時間たって A の中の点が B に動くと，点 P と Q もそれぞれ P′ と Q′ とに移っているであろう。しかし B でのフィラメント構造のために P′ と Q′ との隔たりは極めて大きくなっている。フィラメント構造の詳細は巨視的に“観測”されないので，P のまわりの不確定な領域はフィラメントとともに外へ成長してゆく。そのため我々の位置の

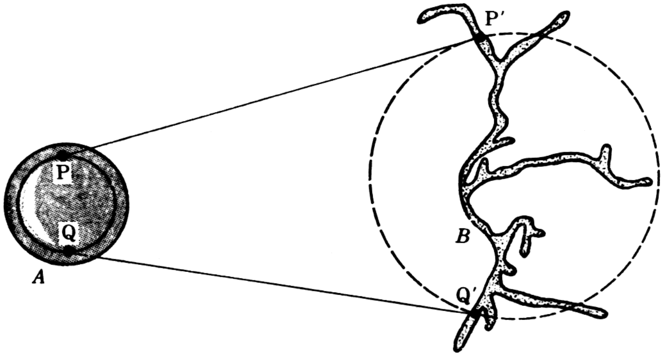


図 3.5 超平面 A が同じ体積ではあるがフィラメント状の B に展開してゆくにつれて，A の中で最初近くにいた点 P と Q とは離れてゆく。巨視的観測で P と Q とを区別できないならば，不確定の領域(破線の円)はフィラメントとともに外に広がり，ついには全エネルギー面にわたってしまう。)

予測は，時間がたつにつれてそれだけ不確かなものとなる。予測能力の喪失は系についての情報の喪失を意味するので，フィラメントの広がりは粗分割エントロピーの増大を意味する。これは2.6節での議論と一致する。もし，観測が限られた時間にわたってしか行なわれないなら，いま述べた現象がまさに時間非対称につながるように見える。実際にミクロカノニカル集団は充分な時間の後にも分かれている(unmix)であろうと思われる。これにはギブス(Gibbs)[5] によるうまい類推があって，水と黒インクの混合物をかきまわす時のことを考える。巨視的尺度でみればすぐに一様な灰色となるのが事実であるが，微視的にはどんなにかきまわしても，水とインクの細分割密度は変わっていない。このことはまさに，二つの流体の詳細なフィラメントを観測できないことにあたっている。その上にもし充分な時間が与えられるなら，流体が一つの領域に集まろうとする機会もあり，水とインクとが再び分離することを期待してもおかしくはない。こうしてミクロカノニカル集団中に極めてまれな揺らぎも起こるので，$\bar{H}$ のポアンカレ型のサイクル(周期)が期待できよう。しかしこのような回帰定理は証明できない。なぜなら，気体の分子とは異なり，集団は点の連続体だからである[6]。

一般化された $\bar{H}$ 定理の中で粗分割 Γ 空間中の有限な大きさのスター)の導入がもたらす決定的な役割に注目しよう。各スターは系の代表点で満たされているが，そのうちのいくつかは，その初期条件の特殊性のために平衡に

近づくことのない個々の系を表わし，それらは低いエントロピーへのポアンカレ型の揺らぎを行なうであろう。しかしこのような系は，一つのスターの中を占めている他の多くの“ふつう”の系に比べて非常にまれである。ふつうでない振る舞いが現われることは，不可能ではないにしても極めてありそうもないことである。

結論として，一般化された $\bar{H}$ 定理は平衡化に対する我々の定性的な理解にとって有益である。それは，初期の瞬間の任意の値から出発して，後の時間には $\bar{H}$ はより低い値になっていることを示しているからである。その値は粗分割密度が定常（ミクロカノニカル）分布に達するまで減少し，そこは最小値なのでその後はもはや減少できないということも充分納得できる。この最後の主張は，運動方程式を直接に扱わず，つまりリウヴィルの式を積分せずには決して証明できない。しかし，このことこそ統計力学が避けようとした状況なのである。特に，$\bar{H}$ 定理は平衡に達するための**時間**については何にもいっていない。平衡化をもっとよく表わすのには，ボルツマンの単一系 H 定理にもどり，それを可逆性からの反論のない本当に**統計的**な扱いによって修正することが必要である。

3.3　統計的解釈による単一系 H 定理

前節で一般化 $\bar{H}$ 定理は，孤立系の中での平衡化の定性的理解に役立つにすぎないことを見た。$\bar{H}$ がその最小値に減少してゆく過程の詳細を追うには，各瞬間での ρ と，そのためには P を知ることが必要である。それは運動方程式の正確な積分によってのみ可能である。そんなわけで，平衡化の厳密な証明が抜けている。

集団の不適当な扱いを少し補正するために，運動方程式を実際に積分せずに，ここでは個々の物理系にもどり，ロシュミットやツェルメロの可逆性反論のないような，ボルツマン H 定理の統計化を簡単に述べよう。

問題としている単一系に対応する Γ 空間中の単一代表点に注目しよう。どの瞬間にも確かなことは，点は有限体積 $W(\Lambda)$ をもつ与えられたスターの中にあるというだけである。H は(2.24)で定義されるか，あるいはそれと等価な定義

$$H=\sum_i n_i \log n_i+\text{定数} \tag{3.1}$$

$$N=\sum_i n_i \tag{3.2}$$

で，μ 空間中の細胞 i の占有数 n_i で表わされる。定義(3.1)は，体系点(system point)がスターから他に移るとき，H が実際に不連続に変化することを強調している。2.3 節に述べたように，H はマクスウェル分布のときに最小であり，そしてこの分布はまた Γ 空間中の**最大**スターとも関連している。実際に，平衡分布に対応するスターの体積 $W(\Lambda)$ は他のどの体積よりも圧倒的に大きい。等アプリオリ確率の仮説によって，孤立した気体の箱をランダムに点検するときの最確分布がマクスウェル分布であるということが導かれる。さらに代表点がエルゴード的で，Γ 空間中の等しい体積の中では等しい滞在時間をもつならば，点はその時間の圧倒的な大部分を平衡状態の中で過ごすであろう。ときには点は極小値より少し大きな H の値に対応する他のスターに転移することもあろう。そのとき気体は揺らぎを示している。それからは，H のより高い値(S の低い値)に対応するもっと小さな体積のスターに点がさらに転移するよりも，平衡スターにすぐにもどるほうがはるかに可能性が高い。しかし最終的には，どんな体積であれ点はすべてのスターを通過するであろう。

このいろいろなスター間を動く代表点の運動は，運動方程式(2.32)と(2.33)の時間対称性によればもちろん完全に可逆である。このような可逆方程式を実際に解くことなしに，そしてそれらと矛盾なく H 定理をつくるのには，次のようにするとよい。最初($t=t_0$)点はある特定な非平衡スターの中にあるとすると，その点が一つのスターから次のスターへ転移するときおそらくほとんどいつでも最大(平衡)スターへ向かうだろう，という**最確**(most probable)の振る舞いを記述してみよう。

式(3.1)を微分して(3.2)を用いると，

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\sum_i(1+\log n_i)\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}=\sum_i(\log n_i)\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} \tag{3.3}$$

となる。それで H の様子は $\mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t$ という量で定まるが，これは点が一つのスターから次に移る遷移確率に関係している。これらの遷移確率は，基礎仮説 D に従って選んだ代表集団を使って計算できる。こうすれば単一系 H 関数を**統計的**に扱うことになる。ここで我々は，仮説 B (2.3 節)に代わる仮説 D に基づいて，$\mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t$ の最確値，つまりは $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ の最確値を扱うことになる。

この統計的 H 定理の証明の詳しいことについては，読者はトールマン(Tolman)[7] を参照されたい。それは 2.3 節の扱い方に近く，2 体衝突につい

ての同じ制限がついている。$(\partial f/\partial t)_{\text{coll}}$ を正確に計算するよりも，衝突によって細胞 i, j から細胞 k, l へ単位時間に移る点の最確(つまり集団平均)数を示す量 $a_{ij\to kl}$ を導入しよう。$a_{ij\to kl}$ は

$$a_{ij\to kl}=A_{ij;\,kl}\,n_i n_j \tag{3.4}$$

の形に書かれるが，そこで $A_{ij;\,kl}$ は衝突ポテンシャルの構造に依存している。体積 V の気体の箱に対しては，実際の形は

$$A_{ij;\,kl}=\frac{|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|\sigma(\boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{v}_j;\ \boldsymbol{v}_k,\ \boldsymbol{v}_l)\mathrm{d}\Omega}{V} \tag{3.5}$$

である〔(2.12)参照〕。微視的可逆性の原理によれば，$A_{ij;\,kl}$ はその逆過程に対応する量と等しく，球状粒子の場合は次の等式となる：

$$A_{ij;\,kl}=A_{kl;\,ij} \tag{3.6}$$

これらの結果を(3.3)に用いると，$\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ の最確値は負であることが容易にわかる：

$$\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{prob}}<0 \tag{3.7}$$

式(3.7)の結果は t_0 の後の巨視的に短い時間に対してのみ成立する。それは仮説 D によってつくった代表集団が有効なのは，ただ初期の瞬間 t_0 においてだけだからである。後の時間では，ρ と P とは一般には等しくない。

H 定理の統計的表現は，可逆性とも回帰パラドックスとも全く矛盾しない。それは非平衡系の**最も起こりそう**な振る舞いについての記述であって，H の値をひき続いて減少**させる**ような系を代表する非常に多くの点を含む集団を用いて計算される。しかし，集団はその H の値を増大させるようなまれな例となる系をも必然的に含んでいる。これらの系が集団に含まれるのは，分布関数 f(または占有数 n_i)を決めるのが巨視的な要求だからである。したがって，すべての粒子がポアンカレ型の大きな揺らぎを示すようなまれではあるが，可能な状況とは矛盾しない。微視的可逆性の原理と回帰定理は**個々の**系の正確な結果についてのことなので，同じような**多くの**系に関する統計的内容とは矛盾しないのである。また，充分な時間がたった後にはある**所定の**系はエントロピー減少を行なうであろうという事実と，**もし**系がエントロピーの低い値をもつならこのエントロピーは減少するよりもひき続いて増大する可能性が極めて大きい，という主張とは全く矛盾していない。別のいい方では，一つの孤立系が低エントロピー状態にあるならば分子混沌の仮説が正しいというのは，極めてまれな場合以外では，確かである。この例外

のときは，無制約 H 定理は適用できない。

この節の統計的単一系 H 定理を 2.5 節の一般化 $\bar{H}$ 定理に関係づけることができる。この節の H を，それが個々の系についてのものであることを示すために H_{syst} と書くと，そのとき $\bar{H}$ と H_{syst} の定義から

$$\bar{H}=\bar{H}_{syst}+\sum_{n}P_n\log P_n \tag{3.8}$$

ここで $\bar{H}_{syst}$ はボルツマンのエントロピー H_{syst} の集合平均であり，第2項はスターにわたっての集団分布を記述している量をすべてのスター n について加えたものである[8]。(3.8)を微分すると

$$\frac{d\bar{H}}{dt}=\frac{dH_{syst}}{dt}+\frac{dP_n}{dt}\log P_n \tag{3.9}$$

となり，$\bar{H}$ の値の減少は次の二つの原因によることがわかる：

（1） 個々の系に対するボルツマンのエントロピーが減少すること。

（2） 集団中の異なる体系点が，すべてのスターにわたって，より一様に広がること。

初期の瞬間 t_0 からの小さな時間が経過しても，H 定理がなお有効である可能性について簡単に議論しよう[9]。H 定理の統計的解釈(3.7)が述べているのは，もし単一系の代表点が最初に H が極小でないスターの中にあると，それはおそらく H のより低い値のスターに向かって動きはじめるだろう，ということである。もし点がほとんどの時間，H の最小値スターの中にあるということを認めるならば，スターからスターへの一連の遷移は，点が一番集まるスターにもどるまで起こるであろう，と考えるのが妥当であろう。しかしこれは，分子混沌の状態が時間的に持続するという仮定をつけ加えない限りは証明されない。すなわち

仮説 B はどの瞬間にも正しい。 (E)

という仮説である。こうすると，(3.7)は初期の瞬間 t_0 から系が平衡に達するまで有効であるといえる。2.2 節の場合のように，仮説 E によって時間非対称のボルツマン方程式(2.10)は復元される。

仮説 E は明らかに力学法則と矛盾している。それは，あらゆる瞬間に等**アプリオリ**確率に従う形で新しい代表集合をつくれることになる。しかし実際には，系の微視的発展によって継続する瞬間での集団の間に関係が生じる。たとえば，t_0 での観測によって代表点がスター Λ_0 の中にあることがわかり，後の時刻 t_1 では点は別のスター Λ_1 の中に見出されるなら，後の観測に基づき仮説 D を使ってまったく自由に新しい集合をつくることはできない。

なぜなら我々はこの集団から，以前の時刻 t_0 に Λ_0 の中に存在していなかったすべての体系点を除かなければならないからである。しかしこれらの点は，運動方程式の正解を得てはじめて選び出すことができるのである。仮説Bの表現によって，そしてその有効条件についての3.1節の議論によっても，衝突は分子混沌ができてもすぐにそれを破壊してしまうことが認められよう。したがって分子混沌の恒常性の仮説Eはこれらの相関を無視することになり，系の巨視的状態は“記憶”をもたないことを仮定している。“記憶の喪失”(または情報の喪失)は当然にエントロピー増大と関連している。それで仮説Eは，系の展開自身の中に統計的要因を導入していて，もはや最初の瞬間についてだけのことにはならないのである。このような仮説を，容器の壁を通しての系の外界との結合として正当化しようとする幾つかの試みもあるが[17]，最終的には実際の計算でボルツマン方程式が成功したときにのみ正当化されるものである(3.5節)。

Γ 空間で代表点の動く経路が統計的処方で極めて正確に記述されるということを認めるなら，その様子をマルコフ的確率過程として表現するのもよい[10]。要点は Γ 空間の異なるスターをめぐるランダム ウォーク(random wark)として見なすことで，そのときは，平衡スターの占める圧倒的に大きな体積のために，系は任意の状態からほとんどいつも平衡に向かうことがすぐにわかる。このランダム ウォークの仮定はもちろん，μ 空間での点のランダム分布という仮説Aと等価である。

読者も，気体の孤立箱は時間に対して非対称ではありえないことがいまや分充に理解されるであろう。

全く任意に，図3.3で t は右に向かって増大するよう選ぶならば，そのとき(3.7)の形の H 定理が正しい。それは図の右分枝にのみ適用される。もし t を左に向かって増大するようにとるならば，H 定理は左分枝に適用される。いずれにしても，他の分枝を記述するためには，(3.7)に負号をつけた“反 H 定理”を導入しなければならない。これは完全に対称である。もちろん，この反対分枝に適用するには，$\partial f/\partial t$ の符号を反対にした“反ボルツマン”方程式が要求される[11]。

ボルツマン方程式は厳密には分子混沌の瞬間にのみ有効なので，図3.3の一方あるいは他方の分枝に沿っての平衡化はただ近似的な記述である。なぜなら衝突が仮定された分子混沌を次第に破壊するからである。[もちろん，増大するエントロピー曲線の中には多くの小さなくぼみがあるかもしれない。

そのときは分子混沌はくぼみの底に対して適用される[12]。] このために，方程式を逆転して揺らぎの増大——エントロピーの最大値から谷への下降——を予測するものとして用いることはできない。それは分子混沌から**離れる**振る舞い(矢印の方向)の記述にのみ用いられる。

ところで，ボルツマン方程式は放物型偏微分方程式であって，それを解くには境界条件を指定しなければならない。上記の注意によって，この境界条件をエントロピーが最小の時(谷の底)にとらざるをえない。方程式は巨視的な方程式なので，境界条件も巨視的な表現となる。

これをたとえで示してみよう。ここでいうボルツマン方程式を論じるよりも，熱伝導の式を考えてみよう。これもまたエントロピー増大の状況にのみ適用される放物型方程式であって，ここでの我々の目的には充分である。異なる一定温度の二つの金属の塊が接触しているとする。熱伝導の式が予測するのは，熱エネルギーがひき続いて分布を変え，系は(指数関数的に)一つの一様温度に近づくということである。ここでは $t=0$ での巨視的条件(温度分布)のみが与えられてはいるが，この予測が正しいというのはほとんど間違いない。もし処方を逆転し，一様な温度から金属塊が異なる温度にある低エントロピー状態へと，過去に向かう状況を記述しようと思うならば，熱伝導の式を使うわけにはいかないだろう。もしそうすると，**どんな**温度の最終分布(すでに一様な場合をも含む)も充分昔には一様分布であったことになってしまう。望むような逆転は，金属塊中のすべての粒子の正確な**微視的**知識があってのみ可能である。

この予測(prediction)と逆予測(retrodiction)との間の非対称は[13]，2.6 節でふれたエントロピーの情報的解釈を使って容易に理解できる。エントロピー増大の状況では，情報は次第に失われ，そのため境界条件の巨視的記述で充分になる。しかしエントロピー減少の状況では，情報は次第に増大し，それで巨視状態が与える**以上**の情報，すなわち微視的指定が要求される。しかし，ここではまだ予測と逆予測に対する説明には時間の中の非対称は入っていないことに注意しなければならない。**予測**は，系がエントロピーの最小から，図 3.3 のどちらかの分枝に沿って，最大に展開してゆくのを記述するのに用いられる。それはエントロピー変化との相関であって，時間との相関ではない。上の二つの金属塊の例では，当初の一様でない温度にどのように到達したかについては何にも述べていない。孤立系に関しては，これは一つの揺らぎによってのみ到達できたものである。この揺らぎの成長の間は時間の

中の“予測”の向きは逆である。[ある人々は[13], 図3.3の時間軸上の矢印を右向きに固定するのを好んで,“予測”は正確には正の勾配に,“逆予測”は負の勾配に適用されるといっている。こうした操作はエントロピー変化よりも時間の向きに関係することになる。ここでは“予”(pre)というのは“エントロピー増大の前”という意味で,それが時間の向きのどちらでもかまわないのである。]

3.4 分枝系を通じての時間非対称

有限な孤立箱の気体は時間の中での非対称を示さないということを前節で明らかにした。それにもかかわらず,我々のまわりの世界の時間の中の非対称は,我々の経験の最も基本的なものの一つである。この非対称性の起源について,これまでの考察を踏まえて調べてみる必要がある。

ボルツマンによって考えられた簡単な気体の箱というモデルは,多くの点で,現実の日常経験の熱力学系に対してはあまりにも簡単化されている。たとえば,現実の系は希薄な単原子の無衝突気体ではないということなどが指摘できよう。しかし,多くの相をもつ物質を含んだ複雑な系にボルツマンの解析を適用しても,簡単な場合と本質的に異なる結果がでるとは想像しがたい。

当面の問題にもっとも関係深いのは,**孤立**とは何かということである。

(1) よく知られているとおり,実験室の中で完全に孤立した熱力学系をつくることは不可能である。望みうる最大のものは**準孤立系**であって,外からの影響が目立つほどの乱れを起こすのに要する時間に比べて,その系のたどる経過の代表的な緩和時間がずっと短いものである。

(2) さらに,本当に孤立している系をかりにつくることが可能だとしても,それは**いつまでも**孤立しているわけにはいかない。なぜならそれは,我々自身がつくりだしたものであるからである。あるいは,孤立系が自然にできたとしても,それでもやはり宇宙年齢よりも若いであろう。

前段の(1)の意味は次の節で考えることにして,まず,この節では(2)に限定しよう。すなわち,準孤立系の生成に注目するが,生成後にも常に残っている外界との小さな結合は,後にわかるように結果の本質的な性質を変えないと思われるからである。

熱力学でのすべての我々の観測や経験は,永久に孤立した系についてのも

のというより，ライヘンバッハ(Reichenbach)[14] が**分枝系**と名づけたものについてであることは読者にとっても明らかであろう。分枝系とは，主要な外界から分離してその後は準孤立系として存在する領域であり，充分な時間の後にはふつうはより大きな外界の中に再びのみ込まれてしまうものである。この種の例は数限りなくあるが，誤解のないよう注意するだけで充分であろう。氷のかけらをとり，それにぬるい飲料を加え，そして氷がとけるのを観察するときには，氷プラス飲料という系はこの操作の**後**に存在するようになったのである。その系は準閉鎖系として前から存在したのではない。また，それが実際に準閉鎖系であるというのは，溶解の過程は外界との相互作用まで考えないでも完全にうまく記述できるということである。

しばらくの間，永久に全く孤立した系の場合にもどろう。そこで，箱の中のエントロピーが最大値より小さなある値になったとき信号を送るような小さな機器を想像しよう。もしこの値が最大値にかなり近ければ，あまり長い時間かからぬうちに信号が観測されるであろう。もしそれが最大値から遠く離れているなら，信号機構が働くには極めてまれな大きな揺らぎを待たねばならないだろう。

ここで次の主張をする。信号が受かったときは，気体は分子混沌の状態，すなわち局所エントロピーが極小の状態にあることは絶対といってよいほど間違いない。

この主張の根拠は，大きな揺らぎよりもずっと多くの小さな揺らぎがあるため，体系の状態が大きな谷の傾斜面にあるよりも小さな谷の底近くにあるほうが，はるかに確からしいという簡単な事実に基づいている(図 3.4)。別のいい方をすれば，系のエントロピーの低い状態を**ランダムに**選び出すと，それはほとんどいつもエントロピー極小の状態であり，時間軸の前後方向をどちらにとろうとも，エントロピーはほとんどいつも，その後**増大**するであろうといえる。

この話と分枝系仮説との関係は次のようである。上に考えたような単一永久孤立系が非対称性を与えない理由はまさに，このようなランダムに選んだ低エントロピー状態ではほとんどいつの場合でも(図 3.3 のように)，エントロピーは未来にも過去にも両方に増大するという事実による。しかし，分枝系がランダムな低エントロピー状態として**つくられる**とすると，それは“過去”には**存在していなかった**ので，過去に向かってのエントロピーの増大はない。これは図 3.6 に描かれているように，$t=t_0$ で $S_0<S_{\max}$ につくられた

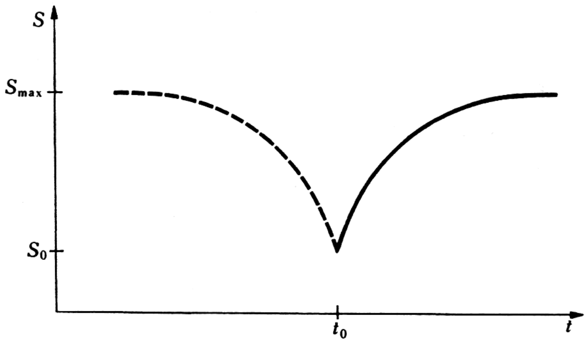


図 3.6 連続線は，t_0 でランダムにつくられた分枝系のエントロピーを示す。線は t_0 の左側には続いていない。系はそのときにはつくられていないからである。その結果，t は明らかに右に増大するように選ぶことができる。これに反して，永久孤立系では平衡からの偶然的揺らぎによって t_0 での低エントロピー状態 S_0 に到達したのはほとんど確かであろう。その様子が破線で示してある。その場合にはエントロピーの様子は明らかに時間対称的である。

分枝系のエントロピーの様子である。H 定理に従ってエントロピーは t_0 の右へ増大を続けるが，t_0 の左側には分枝系は存在していなかった。それでエントロピー値 S_0 をもつ状態は(破線で表わされているように)平衡からのランダムな揺らぎからつくられたと見なすことはもはやできない。その代わり，それは**外界との相互作用**によってつくられたのである。

二，三の例でこの点が明らかになるだろう。上向きに置いた半球の皿のふち近くに小さな球を見るとき，しばらく後には球は皿の中心で静止していることは確かであろう(図 3.6)。しかし，球と皿の系が完全に遮断された箱の中に永久に封じ込められているとすると，球は，皿の中の多くの原子が“負摩擦”(1.6 節)を生じるような偶然の揺らぎによって，皿のふちという低エントロピー状態に自発的に加速されて，このふちの近くに達したと結論せざるをえないであろう。別の言葉では，観測の瞬間の**後**のエントロピーを増大させ，球の運動を減衰させる摩擦は，観測の**前**のエントロピーを減少させる“反減衰”と鏡映になっていると結論することもできるであろう。なぜふつうにはこの結論をとらず，そしてこんな具合の悪い振る舞いを球に押しつけないかという理由はまさに，系は完全には**孤立していない**からである。実際に，我々は球がふちにあるのを見たとすると，その位置に**よそ**から落ちたか

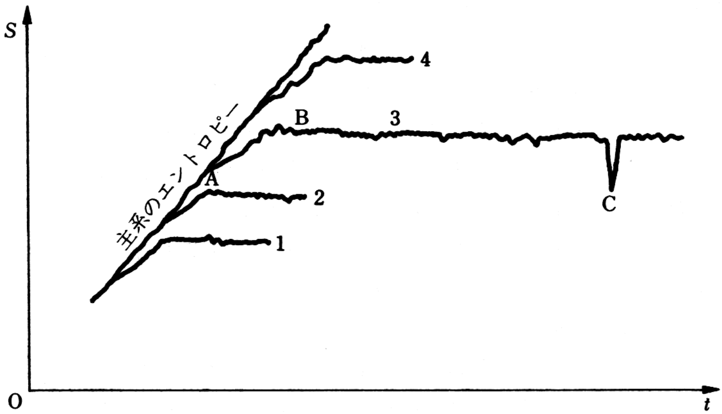


図 3.7 圧倒的大多数の分枝系 1, 2, 3, ･･･ はそのつくられた後(たとえそれ以後は完全に孤立しているとしても)そのエントロピーを増加する。エントロピー増加の機会，たとえば時間軸を縮めて表わしてある系 3 の C のようなものは，ポアンカレの回帰時間に比べてずっと短い系生成後の時間のあいだには，ほとんど起こらない。

落とされたのであって，球と皿の系はその瞬間の直前に存在するにいたったと思うに違いない。

もう一つの有名な例[15]は，人影のない海岸の砂の上の足跡を見た人の考えに関するものである。かりに砂浜のその部分とそのすぐ外界とが一つの孤立系であるとするならば，人は足跡が海とか風とかによる砂の粒子の運動によってつくられた——ほとんどありそうもないできごと——と結論せざるをえないだろう。しかし実際には，次のように結論するであろう。砂浜は孤立系**ではなく**，分枝系であり，足跡は散歩者によるもので，散歩者と砂の粒子との接触が系を外界に結合させたのである。

ライヘンバッハ(Reichenbach)[14]により主張されたのは，分枝系のエントロピーという性質が単一永久孤立系にはない非対称性を熱力学に与えているということである。議論は図 3.7 に集約されている。宇宙の我々の局所領域を主系としたエントロピー曲線が描いてあり，多くの分枝系が 1, 2, 3, ･･･ の点で離れていく。これら分枝系はその生成の瞬間には**完全に**孤立している。すなわち現実には確かに存在している主系との残留結合を無視する，としてよいだろう。もしすべての分枝系が**ランダム**な低エントロピー状態に**つくられるなら**，すでに見たように，これらの新しい孤立系のエントロピーは

時間増大の向きの約束ごととは無関係に増大することはほぼ確かであろう。つまり，ほとんどすべての分枝系が**平行な**エントロピー変化を示すということを，強力に主張できるだろう。(ほとんど)すべての分枝系のエントロピーのこの平行増加をもたらすものは，**分枝系の生成**に関するこの非対称性なのである。この非対称性は，統計，粗分割，H 定理，その他によっては決して導かれ**ない**ものである。もし分枝系が**過去**には存在していないと見なされるなら，これらの系のほとんどのエントロピーは**時間とともに増大**するだろう。エントロピーが時間とともに増大するという在来の直観的な考えが導かれるのは，分枝系を通じてのことなのである。

こうした考察から，完全孤立系の場合にも有効なエントロピー法則をつくることができる。ある特定な機会にランダムに選ばれた状態 $S<S_{max}$ にある系の集団は，上の議論から，すべてのこれらの系はエントロピー極小の分子混沌の状態にあり，t の大きいほうにも小さいほうにも両方向にエントロピーが増大する，というのは全くといってよいほど確かなことである。任意の二つの系 A と B とを選び，そのエントロピーが最初は $S_A{}^1$ と $S_B{}^1$ とであったとし，次の時期(最初とあまり離れていない)に $S_A{}^2$ と $S_B{}^2$ とになるとすると，そのときの積は

$$(S_A{}^2-S_A{}^1)(S_B{}^2-S_B{}^1)\geq 0 \tag{3.10}$$

である。これは t の増大の向きをどちらにとっても同じである。上に見たように A と B はともに平行方向に変化するのはほとんど確実だからである。もし $S_A{}^2>S_A{}^1$ なら $S_B{}^2>S_B{}^1$ であるが，もし時間を反対の向きに測ると $S_A{}^2<S_A{}^1$ なので $S_B{}^2<S_B{}^1$ であり，(3.10)の積は両方の場合に正である。これがエントロピー法則のシュレーディンガー形式[16]で，たとえば A を問題としている系とし B をそれ以外の世界とするならば，ふつうの法則の形となる。そのときに時間の増大の向きを全世界のエントロピー増大の向きと定義するならば，(3.10)は

$$\Delta S\geq 0 \tag{3.11}$$

となり，ここで $\Delta S=S_A{}^2-S_A{}^1$ である。(3.11)はまさにクラウジウスの法則(2.3)である。

これはふつうには明白だと見なされていることの確認であって，分枝系でのエントロピー変化の向きは，外界(主系)のそれと平行であるということである。とにかく，外界との相互作用によって低エントロピー状態に分枝系がつくられ，つづいてそのエントロピーを増大させるときはいつでも，この相

互作用自身が全体系のエントロピー増加をもたらすだろう。たとえば，足跡がつけられたことによる砂浜のエントロピー減少は，散歩者の筋肉の中のエネルギー散逸や摩擦によるまわりの領域への熱の流れなどによる**外界**でのエントロピー増加によって，十二分に補償されているのである。

図3.7の系3は非常に長い時間にわたる振る舞いを示している。この系のエントロピーは，前に述べたように，AからBに上がり，そこで系は“平衡”に達したといわれる。しかし完全に孤立しているので，最終的には(ポアンカレ周期の後に) Aの状態に近いCにもどる。ここまでくれば分枝系の振る舞いからは，もはや時間非対称を導くことはできないであろう。もちろん実際には，そこにゆくまでに外界から系への乱れがあって，時にはその系は存在しなくなり，また広い外界の中に再びのみ込まれてしまうことさえあるだろう。それにもかかわらず，ポアンカレの回帰時間に比べて短い時間の間では，全体的な熱力学的非平衡状態によって分枝系がランダムな低エントロピー状態につくられているときには，その振る舞いは決定的に時間非対称を示す。さらに系が完全には孤立していないために外から系に**ランダム**な影響があったとしても，それはこの結果を変えないことも明らかである。すなわち，完全に孤立した分枝系の形成に対する非対称性は**すでに存在して**いるので，非対称性を説明するために，その後は常にいくらか存在している外界との継続的な結合に頼る必要はないのである。一般的にこの残留結合の影響は分枝系の**巨視的**なエントロピーの振る舞いに対してAからBへの増大の間は無視できるけれども，それは次節で見るように，確かに系の微視的可逆性を破壊しているのである。

3.5 外界の影響

分枝系のエントロピーの振る舞いが，常に存在している外界との相互作用によっては変わらないということは，日常のなじみ深い例で確認できる。すでにあげた例をとれば，ぬるい飲物の中の氷塊は，銀河からの小さなランダムな影響が氷の中の分子を乱しているかどうかにかかわらず，とけるだろうということは明らかであう。また，時計を密封した箱の中に入れたとして，箱の壁の粒子運動が時計に及ぼす影響を考慮しても，時計は動くだろうということは疑いない。

確かに，これらの影響は情報を破壊している(2.6節を見よ)ので，系の一般的なエントロピー増大に寄与してはいるが，決してこのエントロピー増加

にとって**必要**なものではない。その上に，それらは**充分**でもないといえよう。もしそれらが本当にランダムな影響なら——これは不当な仮定ではない——そのときは時間非対称性はない(ランダムな系列の逆はなおランダム系列であり，そのような逆の系列もここで考えたのと同じように有効である)。それにもかかわらず，平衡への近接(時間の中の非対称ではない!)をつくりだすために粗分割に代わるものとして，閉鎖系の外界との継続的な相互作用が多くの人々によってもちだされた[17]。これを調べてみよう。

一つの系を外界から全く孤立させる方法はないように思われる。ある種の材料は物質や熱の流れを妨げるのに有効ではあるが，実際に完全な絶縁ができるような材料や装置は知られていない。この点で，硬い弾性的な壁をもつ器の中の気体というボルツマンのモデルは完全なフィクションである。実際の壁はどれでも原子からなっており(あるいはよくてもせいぜい磁場の壁であるが，それは電磁場をとおしてしまう)，これら原子は壁の厚さをとおす外界との結合に影響された運動状態にあるだろう。

第2章で統計力学的結果を導くのに用いた基礎的仮定の一つは，体系と**壁との相互作用を含む**全ハミルトニアンの存在であった。硬い弾性的な壁に対しては，粒子を無限に深いポテンシャルの井戸の中に入れる形のポテンシャル エネルギー項が $\mathscr{H}$ に加えられる。$\mathscr{H}$ の存在によって正準方程式の適用が可能となってリウヴィルの定理，そしてつづいて H 定理に導くことができる。

しかし，壁が硬くなくて，何かはっきりしないような運動状態にあると，ハミルトニアンがつくれず，正準法を用いることができない。もちろん壁の原子も記述の中に含めるなら，可能となるかもしれないが，そのときは壁の外の物質を考慮しなければならないだろうし，つぎつぎに拡張しなければならない。本当に正準的な系は全宇宙だけである(そしてそれも有限なものに限る)。

壁原子の運動を無視することの正当性は次のようなことであった。完全な孤立系は，気体がその容器の壁と平衡に達するに要する時間よりもずっと短い時間の間に，すでにそれ自身で平衡になっているということである。平衡への近接を起こさせるのは気体分子の内部衝突であって，壁との衝突ではない。詳しい計算によれば[17]，内部緩和時間(気体が内的平衡に達するのに要する時間)は，壁との平衡に達するのに要する時間の 10^{-4} 倍程度の短さである。このことは，ある状況下で壁が気体の振る舞いに相当程度影響すること

を否定するものではない。それはただ，熱力学系の非対称性は完全な孤立系の生成の中にすでに存在していて，容器の壁との相互作用をつけ加える必要はないということを確かめているにすぎない。

しかしながら3.1節では，完全な孤立系に対しては“本当の”平衡状態はないということを述べた。実のところ，平衡の定義そのものが**粗分割的観測**の制約と本質的なかかわりがあり，平衡状態とは最も多くの微視的状態からつくられる巨視的状態(あるいは Γ 空間の最大体積を占めるもの)である。ある人々は平衡への緩和の議論の中に粗分割を用いることに強く反対した[17]。粗分割化は，いつかは克服されるかもしれない人間的な観測限界を前提としている，というのがその反論であり，実際にすでにその限界を越えた一つの重要な場合があるとしている[18]。第2章で論じた平衡は，この人達によれば“擬似平衡”である。彼らの主張によれば，それは気体の客観的な性質ではなく，異なる微視的配位を識別することができないという主観的無力を表わしている。この観点からいえば，任意の状態から放置された気体は，それが我々に“平衡”に達したと“見えて”から永い後にも，分子間になおすべての複雑な相関性がある。分子速度を逆転すると，系がその初期条件を“忘れて”しまっていない限り，系は再び(時間反転した)初期状態に確かにもどるだろう。しかし，ありきたりの反対でいえば，このような逆転は実際には遂行できないということである〔ボルツマンの言葉では“さあ，やってごらんなさい”(*Go ahead, reverse them.*)である〕。これはいささか言い逃れであることは明らかである。現実に，一つの逆転を実際にもたらしたハーン(Hahn)[18]のスピンエコーの実験ではこの言い逃れができない。

数学的観点からは，細分割 $\bar{H}$ 関数 σ (2.47)が時間的に一定である(2.49)ということは反論の余地がなく，これに非対称性はない。さらに，H 定理によって表わされるような粗分割 $\bar{H}$ 関数の連続的減衰は明らかに仮説 E によるが，これは相関性についての情報を捨て去ることを許すことによって，エントロピー増加を導いている。したがって，低エントロピーの分枝系の生成に伴う時間非対称性は，この情報は無関係とか観測できないとかという問題の多い前提によるもので，それは人間世界の巨視的性質という明らかに主観的な基準によっていることは否定できない。

他方では，系の壁のランダムな乱れは，初期状態についての情報を次々に破壊してゆくことによって，細分割エントロピーの増加さえもたらし，非対称性の客観的な担い手である。初期条件が完全に忘れられてしまった時の

み，系は“本当の”平衡にあるといえるのだろう。この状態に達したとき，分子速度の逆転は初期状態の様相を再現することなく，ただ平衡を維持することと思われる(これは微視的非可逆性のある時間非対称性の一例である)。一般に，この“本当の”平衡を確立するのに要する時間は，通常，粗分割的な緩和時間と見なされている時間よりもはるかに長いのである。

ランダムな乱れと緩和や平衡に対する粗分割的な扱いとの間の見かけ上の矛盾を取り除くには，それぞれの方法が解こうとしている問題をよく吟味する必要がある。

まず，物理系の**集団的**性質に意味付けをするかどうかを決めなければならない。たとえば，振り子を物理学でまともに扱うなら，その運動状態では摩擦による減衰を受け，その振幅は次第に減少すると結論せざるをえない。系のポアンカレの回帰時間に比べては極めて小さいふつうの時間に限るなら，一つの存在としての**振り子**は時間の中で非対称的に振る舞ったと認めなければならない。熱力学の言葉ではこの減衰は巨視的非可逆変化とよばれるであろうが，(外界をも考慮に入れると)完全な微視的可逆性はなお存在している。すなわち振り子は，非対称的であるが，(微視的に)可逆的である。

これとは対照的に，振り子とそのまわりの完全な原子的構造を考えるやり方をしてもよいだろう。その場合には“振り子”などというのはもはや何の意味もなく，(もし外界を無視するなら)我々はただ何の非対称性もなく全体的に振る舞う粒子集団を扱っているだけである。この状況では，**非対称性**の問題ではなく，微視的な意味での**非可逆性**を問うのがより適当である。実のところ，外界から侵入してくる影響はランダムであるとすると，自然の中には微視的非可逆性が存在する。しかしここでは，巨視的尺度での非対称性の問題を論じるのに，微視的非可逆性の存在を用いるべきではない。もちろん，粒子の有限系の細分割エントロピーは増大し，初期条件が忘れられて，時間の中での非対称性を示すだろう。けれどもこのことは，スピンエコーなどの実験を行なっている物理学者にとって関係があるだけである。振り子が熱を生じて止まるようなことはないかを知ろうとする時計メーカーにとっては何の意味もない。粗分割的な非対称が“真実”か否かを決めるのは，物理よりも哲学のテーマである。これに関して注意すべきことは，振り子が減衰して停止するのはふつうは**客観的事実**であって，マクスウェルの魔物ならざる人間の限界による結果では**ない**，ということである。このことは第4章と7章での考察でも一層明らかになることで，そこでは全宇宙の運動が巨視的

な減衰効果に依存していることがわかる。そのとき次の二つの見解がつけられる：

（1） その場合にはランダムな影響を及ぼす外界は**存在**しない。

（2） 宇宙の運動はおそらく客観的である。

同じような状況は生物学の問題にも現われている。人間の体の個々の原子それ自身は生きていない，という事実は人間としての意義を打ち消すものではない。集団系もやはりまともな研究対象であって固有の法則や現象をもっている。たとえば条件反射は，それが“実際には”個々の無生命の原子によるものであるという事実であっても，その現実性が減るとは思われない。

低エントロピー状態の系はその後は連続的に平衡化に向かうということを，確率性の仮説，たとえば，巨視的には関係ないという理由ですべての瞬間での相関性を捨て去る仮説(E)を付け加えないで，統計的に説明することはもちろん不可能である。しかし統計力学は全く巨視的形式であって，そこでは微視的相関性を考えないというような巨視的偏見も許される。“平衡”についての我々の巨視的立場を維持する限り，系を完全に微視的に記述してもほとんどすべての初期条件から，平衡への連続的な近接が起こることを誰も本気には疑ってはいない。フラスコの中の二つの混合気体がもしある魔術によって，すべての分子速度が同時に逆転されるなら当初の混合しない状態にもどるだろう，といわれたとしてもそのために混合の現実性が減るわけではない。このことは完全に混合した状態をただ“擬似平衡”とよぶだけのことになるのであろうが，それは言葉の問題にすぎない。相関性を捨てることによって，**現実に観測されるもの**を記述しているのであって，ほかに何も必要ではない。振り子のような巨視的物体の運動によって現実化される原子の集団的振る舞いに意味があると認めるならば，そのときは微視的考察は大して有効ではない(ここでは外界の影響を無視)ということを強調しなければならない。粗分割化を除くことが巨視的非対称性を除くことだと考えては**いけない**。振り子の完全な微視的記述はやはり，圧倒的確率で，振り子が減衰停止するだろうことを予測する，すなわち微視的解析を通じて“振り子”という巨視的概念を維持することによって，同じような巨視的非対称性の結論に(ほとんどいつも)到達するだろう。

粗分割化の除去が巨視的非対称性の除去にはならないということの良い例がルービン(Rubin)[19] によって与えられた。それはブラウン運動に対する1次元モデルを用いるもので，正確に扱うことができる。隣と結合定数 K で

結ばれた質量 m の N 個の格子と，大きな質量 $M(\gg m)$ の1粒子を考える。$t=0$ では，ある速度を与えた重い粒子以外の格子は静止しているとして，それからの格子の運動を計算する。期待どおり重い粒子の運動は減衰し，その運動の平均をとると減衰は(大きな N に対して)ほとんど指数関数的で，"粗分割的"予測と一致している。もちろん全体としての時間の対称性は保存されていて，正確な解は時間反転に対して明らかに不変である。揺らぎも起こり，そして $\frac{N}{2}\left(\frac{m}{K}\right)^{1/2}$ 程度の長さの時間がたつと系はポアンカレ型の周期を完了し，重い粒子は"自然"に加速されて再び大きな速度になる。もし(実際の系で常にそうであるように)ポアンカレの回帰時間に比べてずっと短い時間に限るなら，ほとんどすべての初期条件に対して，重い粒子の非対称的で指数関数的減衰は，**正確な**結果として導かれる。

参考文献

1. J. Loschmidt: Wien. Ber. **73**(2) (1876) 135, 366; **75**(2) (1877) 67.
2. E. Zermalo: Wied. Ann. **57** (1896) 485; **59** (1896) 793.
3. H. Poincaré: Acta Math. **13** (1890) 1.
4. K. Huang: *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1966) p. 85.
5. *The Collected Works of J. W. Gibbs* (Yale Univ. Press, New Haven, 1948) vol.2, p. 144.
6. P. T. Ehrenfest: *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1959) p. 63.
7. R. C. Tolman: *The Principles of Statistical Mechanics* (Oxford Univ. Press, London, 1938) sec. 51.
8. R. C. Tolman: 上掲 7, p. 176.
9. 詳しい計算は, R. Jancel: *Foundations of Classical and Quantum Statistical Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1969).
10. R. Jancel: 上掲 9.
11. E. N. Adams: Phys. Rev. **120** (1960) 675.
12. K. Huang: 上掲 4, p. 90.
13. S. Watanabe: Rev. Mod. Phys. **27** (1955) 179. T. Wu and D. Rivier: Helv. Phys. Acta **34** (1961) 661.
14. H. Reichenbach: *The Direction of Time* (Univ. of California Press, Berkeley, 1956).
15. M. Schlick: *Grundzuge der Naturphilosophie* (Vienna, 1948) p. 106. A. Grünbaum: *Philosophical Problems of Space and Time* (Knopf, New York, 1963 and Routledge & Kegan Paul, London, 1964).

16. E. Schrödinger: Proc. Roy. Irish Acad. **53** (1950) 189.
17. たとえば, J. M. Blatt: Prog. Theor. Phys. **22** (1959) 745.
18. E. L. Hahn: Phys. Rev. **80** (1950) 580.
19. R. J. Rubin: J. Amer. Chem. Soc. **90** (1968) 3061.

より進んだ読者には

1. O. Costa de Beauregard: "Irreversibility problems" *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, ed. Y. Bar-Hillel (North Holland, Amsterdam, 1965).
2. R. P. Feynman: "The distinction between past and future" *The Character of Physical Law* (B. B. C. Publications, Cox & Wyman Ltd., London, 1965) chap. 5.
3. R. Jancel: *Foundations of Classical and Quantum Statistical Mechanics*, (Pergamon Press, Oxford, 1969). この本には広汎な文献目録がある。
4. P. T. Landsberg: "Time in statistical physics and relativity" Studium Generale **23** (1970) 1108 reprinted in *The Nature of Time*, eds. J. T. Fraser, F. C. Haber and G. K. Müller (Springer, Berlin, 1972).
5. H. Mehlberg: "Physical laws and time's arrow" *Current Issues in the Philosophy of Science*, ed. H. Feigl and G. Maxwell (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961).
6. P. Morrison: "The instability of the future" *The Nature of Time*, ed. T. Gold (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1967).
7. R. E. Peierls: Time reversal and the second law of thermodynamics, *Methods and Problems of Theoretical Physics* in honour of R. E. Peierls, ed. J. E. Bowcock (North Holland, Amsterdam, 1970).
8. S. Watanabe: "Time and the probablistic view of the world" *The Voices of Time*, ed. J. T. Fraser (Brazilier, New York, 1966).
9. N. Wiener: *Cybernetics* (Wiley, New York, 1948).

4

熱力学と宇宙論

4.1 非対称の最終的源泉

第2章では，時間軸の二つの向きの構造的な違いが熱力学ではどのように説明されるかを述べた。また，この非対称の起こる原因として，局所分枝系すなわちエントロピー変化があって観測や計測にかかる準孤立領域は，外界との相互作用によって非対称的につくられるからであると考えた。ここで“外界”という言葉の意味と，開放系とは何であるかを考えてみよう。

実験室内での実験では，外界とは，実験室自身や照明・加熱などの種々の外的装置とか技術者をも含んだすべてと考えてよい。またもし，全実験室を準孤立系と考えるなら，外界とは，全地球とか，あるいは太陽系までも考えることになるだろう。最終的には，もちろん全宇宙を考えなければならない。このようなつぎつぎに大きくなる分枝系の階層を考えることができるわけで，その中で個々の系は階層のより大きなメンバーとの相互作用によってつくられるようになっている。

たとえば3.4節で述べた砂浜での足跡の形成の問題を思い起こそう。足跡の近くの砂浜で構成されている準閉鎖系は，“外界”と相互作用することによって低いエントロピー状態につくられるが，この場合の外界とは散歩者の足を意味する。相互作用の際に，砂浜は散歩者と結合して，より大きな系をつくり，砂浜のその局所領域のエントロピーが減少する。それは，砂浜を含む大きな系全体の代償によってはじめてできるのである。特に散歩者には，新陳代謝があり，彼の筋肉の中にも地面と接する踵にも，熱が生じる。熱の一部は空気中にも，また砂の下層のほうにも放散される。このとき熱力学第

2法則は破れてはいないが，系全体(砂浜＋散歩者)はなぜ何らかの平衡状態にならないかという疑問が起こる。というのも，砂浜に低エントロピーの足跡をつくるためには，負エントロピーの源をより大きな系に設定することが必要だからである。しかし，この負エントロピーもまた，こんどは散歩者を一つの分枝系と見なすことによって説明されなければならない。この人間は，まわりの空気を呼吸しながら食糧のエネルギーを解放することによってのみ，運動をすることができる。彼の低いエントロピーの初期状態は，これらの外的要因との相互作用によってもたらされたもので，相互作用の中で失われるエネルギーは，それに見合うエントロピー増加以上のものを生じている。さらに進んでは，最初の消費食糧の存在を説明するためには，我々は太陽光による光合成から太陽内で起きている核反応過程にまでいたることになる。しかし太陽さえも，宇宙の初期の頃の原始的なガスからつくられた準孤立分枝系にすぎない。

局所分枝系の時間非対称の源を探ることは，対象が容赦なく過去へも外へも広がってゆき，宇宙論や宇宙創成の議論に及ぶことになる。

4.2　現代宇宙論の基礎

宇宙論とは，宇宙の大きな尺度での様相を研究するものである。1.1節で，時空の幾何学的性質は計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の中に含まれていると述べた。$g_{\mu\nu}(x)$は一般的には位置 $(x^0\cdots x^3)$ の関数であり，間隔 ds は次の式で決められる：

$$ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{4.1}$$

アインシュタインの一般相対論によると，時空の幾何学的性質とそこでの重力的性質との間の関係は，よく知られた場の方程式で与えられる：

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}=8\pi GT_{\mu\nu} \tag{4.2}$$

ここでは，ふつうの方法として，いわゆる宇宙項を省いてある。[この項を含んだ宇宙モデルについてはボーンディ (Bondi)[1] による議論がある。]　(4.2)の左辺は純粋に幾何学的な表現で，$g_{\mu\nu}$ 以外にテンソル $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ とスカラー $g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}\equiv\mathcal{R}$ があり，$\mathcal{R}$ は $g_{\mu\nu}$ とその1階と2階の微分からつくられる(正確な定義はここでは必要ない)。右辺のテンソル $T_{\mu\nu}$ は，おなじみのストレス エネルギー 運動量テンソルであって，物質の物理的条件によって定まるものである。Gはニュートンの重力定数で，両辺をつなぐのに適当な単位系をとっている。

質量-エネルギーの分布が与えられると，そこでの空間の幾何学的構造に対して，(4.2)は原理的には解くことができる。一般相対論はまたダイナミックスも与えているので，幾何学の時間的な変化をも求めることができる。しかし最も簡単な場合を除いては，でてくる非線型方程式を解くことは不可能に近いほどにむずかしい。それにもかかわらず，1.4 節で指摘したように，宇宙全体をならした大きな尺度で見た構造は，均質で等方であり，一様な運動をしていると考えることができる。このときは，計量は簡単なロバートソン-ウォーカー型となる：

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{(1+\frac{1}{4}kr^2)^2}\{dr^2 + r^2 d\Omega^2\} \tag{4.3}$$

この簡単な計量は，未知のスカラー パラメタとしては R と k だけなので，(4.2)も簡単化されて

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k}{R^2} = 8\pi G\varepsilon \tag{4.4}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp \tag{4.5}$$

となる。p と ε は，宇宙を均一に満たしていると考えた宇宙流体の圧力とエネルギー密度であって，$T_{\mu\nu}$ 項の中に含まれていたものである。

式(4.4)と(4.5)から興味深い関係式が得られる：

$$d(\varepsilon R^3) + p\,dR^3 = 0 \tag{4.6}$$

ここで R^3 は宇宙膨張につれて増大する体積であることに注意しよう。したがって，このような体積は(1.4 節で述べたような)観測している**座標と共に動いている**状態にある。それで εR^3 という量は共運動体積中のエネルギーを表わし，$p\,dR^3$ は，体積が膨張するとき圧力 p によってなされる仕事を表わしている。したがって，(4.6)はちょうど断熱膨張系の熱力学第 1 法則(エネルギー保存則)の宇宙版となっている。(2.1)と比較してみるとよい。

宇宙は現在 $p/\varepsilon \ll 1$ なので，(4.5)と(4.6)の中で $p=0$ と置いてもよいだろう。そのとき(4.6)は

$$\varepsilon R^3 = 一定 = \frac{3}{4\pi}\mathcal{M} \tag{4.7}$$

となり，これは共運動体積中の全**静止**質量は期待どおりに不変であるということを表わしている。(4.4)を(4.7)の条件の下で書き直すと，次のようになる：

$$\dot{R}^2 = \frac{2G\mathcal{M}}{R} - k \tag{4.8}$$

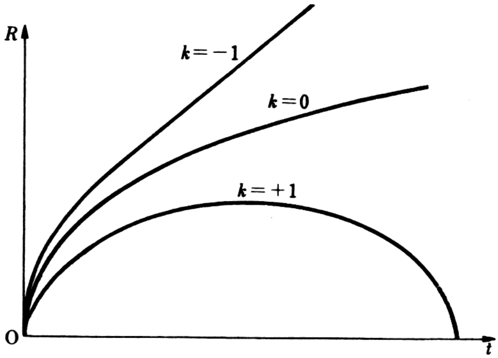


図 4.1　物質で満たされた宇宙についてのフリードマンの三つのモデル　(すべては $t=0$ で $R=0$ の特異状態から出発している。$k=0$ と $k=-1$ のモデルは永久に膨張するが，$k=+1$ のモデルは R の極大値に達し，その後は別の特異点に収縮する。もっと現実的なモデルでは，R の小さな領域では輻射優勢であり，$t^{1/2}$ のような形で膨張している。)

この式は，k の値が $-1, 0, +1$ によって三つの異なる解をもつ。パラメタ表現では

$$R=G\mathcal{M}\times\begin{cases}1-\cos\eta & k=+1\\ \frac{1}{2}\eta^2 & k=0\\ \cosh\eta-1 & k=-1\end{cases}$$
$$t=G\mathcal{M}\times\begin{cases}\eta-\sin\eta & k=+1\\ \frac{1}{6}\eta^3 & k=0\\ \sinh\eta-\eta & k=-1\end{cases} \tag{4.9}$$

となる。

解(4.9)で記述される三つのモデルは図 4.1 に示してあるが，その発見者[2]に因んでフリードマンのモデルとよばれる。(4.8)を見ると，小さな R に対しては k 項を無視できることがわかる。そのとき三つのモデルはすべて，$t^{2/3}$ のように膨張する。$t=0$ ではスケール因子 $R=0$ であり，(4.7)から，この点では無限大のエネルギー密度という特異状態となっている。この事象はしばしば宇宙の**創成**とよばれていて，宇宙時間 t は宇宙**年齢**と名づけられる。$k=0$ のモデル(これはまたアインシュタイン－ドゥ・シッターのモデルとして知られている)は $t^{2/3}$ のように膨張をつづけるが，空間曲率 $k=\pm1$ をもつモデルでは，(4.8)の中の k 項が効いてくるにつれて，最終的には $t^{2/3}$ からそれることになる。負の曲率 $k=-1$ のモデルは，(4.8) で $R\to\infty$ とし

て導かれるように，最終的には $R \propto t$ の自由膨張となる。他方，正の曲率 $k=+1$ のモデルは，あるところから体積の縮少が始まって最終的には，$\eta=2\pi$ で $R=0$ というもう一つの特異状態に到達する。このモデルは，膨張の最高点に対して，時間的に対称となっている。

一般相対論によらないでニュートン力学に基づいたモデルからでも，全く同じような振る舞いを導くこともできる。その場合には，質量 $\mathscr{M}$ を含む共運動体積の全エネルギーによって，上記の振る舞いは容易に解釈できる。$k<0$ のときは，このエネルギーは正であり，宇宙流体の重力は物質の散逸をとどめるのには不充分である。しかし，$k>0$ のときはエネルギーは負であって，流体は重力的に束縛されていて，高密度状態に再びつぶれてゆくことになる。もし $k=0$ ならエネルギーはゼロで，流体は再崩壊をちょうどうまく"免れる"ことになる。この**臨界エネルギー密度**は，(4.7)と(4.8)とから

$$\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$$

ということがわかる。

これらの結果を導くための簡単化の中で，特に問題にしなければならないものは $p=0$ の仮定である。これまでの議論では，宇宙媒質の性質について何もいわなかったが，ここで若干ふれてみよう。宇宙の現段階では，エネルギー密度 ε への寄与は主にバリオンからくるもので，それが星，惑星，ガス，チリ，そしておそらくはブラックホール(4.6節参照)，などの安定な物質を形成している。さらに，光子，ニュートリノ，重力子など質量のないいろいろな形の粒子もある。最後の二つ(ニュートリノと重力子)の寄与はどんなものかはよくわかっていないが，通常ほとんど効かないとされている。主として熱的背景輻射(thermal background. 以下を見よ)の形にある光子が，おそらく大きな寄与を与えているのであろうが，しかしこれさえも，物質のそれに比べて 10^{-4} の程度にすぎない。

他方，物質はほとんど圧力を及ぼさず，圧力への寄与は輻射によるものが支配的である。さて輻射圧力 p とそのエネルギー密度 ε_γ の間には次の関係がある

$$p=\tfrac{1}{3}\varepsilon_\gamma \tag{4.10}$$

したがって，$\varepsilon_\gamma \ll \varepsilon_{\mathrm{m}}$ (ε_{m} は物質のエネルギー密度)のときは，$p \ll \varepsilon_{\mathrm{m}}$ となって圧力は無視できる。しかし(4.6)からわかるように，これはすべての R にわたって正しいというわけにはいかない。物質については

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} R^3 = 一定$$

なので

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} \propto R^{-3}(t) \tag{4.11}$$

となるが，輻射については

$$\mathrm{d}(\varepsilon_{\gamma} R^3) + \tfrac{1}{3}\varepsilon_{\gamma}\mathrm{d}R^3 = 0 \tag{4.12}$$

によって，次のように表わされる：

$$\varepsilon_{\gamma} \propto R^{-4}(t) \tag{4.13}$$

その結果，$R \to 0$ につれて $\varepsilon_{\mathrm{m}}/\varepsilon_{\gamma} \to 0$ となり，輻射のエネルギー密度は物質のそれを越えることになる。

これは物理的にも容易に理解できる。共運動体積中の粒子(バリオン，レプトン，光子)の数は膨張によっては変わらない(光子は定常的に境界を出入りしているであろうが)。非相対論的物質に対しては，共運動体積あたりのエネルギーは単純に物質密度に比例していて，これもまた一定である。しかし光子のような相対論的粒子に対しては，この記述は正しくない。光子数は一定にとどまっていても，光子振動数(あるいはエネルギー)は R^{-1} に比例するので，初期状態に近づくにつれて限りなく増大する。[これはよく知られた宇宙論的赤方偏移である。ここではその向きが逆ではあるけれども。]

この輻射優勢期に対しては，$p=\varepsilon/3$ の項をもった(4.4)と(4.5)の新しい解を求めなければならない。これはすぐに求まり，$R \to 0$ につれて曲率項と $\ddot{R}$ 項は無視してもよいことに注意すると，式は全く同じことになり

$$R^2\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon R^4$$
$$= 一定$$

である。そこで $R \propto t^{1/2}$ となる。

こうして，どのモデルを選んでも $R=0$ の無限大密度の困難は，$t=0$ で避けることはできない。しかしこの条件は，宇宙の均一性と等方性を少し変えるぐらいでは避けられないという以上には，この微妙な問題にここで深入りする必要はない。我々の目的にとっては，次の点を認めるだけで充分である。すなわち，これらのモデルによれば宇宙はその初期に極めて圧縮された状態にあったと思われる，ということである。次に，それを裏書きする証拠をいくつか述べよう。

この特異性は一体何年前に起きたのであろうかということは，(4.8)の定数 $\mathcal{M}$ と k から定まる。$\mathcal{M}$ と k はまた，原理的には観測や測定できるはずの物質密度と幾何学とに依存している。実際には，銀河系の大きさによる曲率

測定は全く信頼できないが，光を放つ物質の密度はよく知られていて，だいたい $10^{-31}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ である。これは臨界密度のおよそ1％にしかあたらない。ただ一つの問題は，我々の検出にかからない物質は多量には存在しないだろうということには，全く確信はない点である。多量の銀河系間ガスとかブラックホールが存在するかも知れないのである。

これらのことを独立にチェックするには，$\dot{R}/R$ と，減速パラメタとして知られる $q=-R\ddot{R}/\dot{R}^2$ との直接測定をすればよい[3]。これらの量の現在値はそれぞれ，$10^{-18}\,\mathrm{sec}^{-1}$ と 1 ± 0.5 とであって，これによると宇宙の一つの**年齢**(共運動観測者によって測定された特異点以後の時間)として，モデルによって少しは異なるが，およそ 10^{10} 年となる。この年齢は，放射性物質の寿命から計算した地球の年齢とも矛盾しない。$q=1$ という値は不確定度が大きすぎて，あまり本気にしてはいけないが，額面どおりに受け取れば，周期を繰り返す閉じたモデルを示している。しかし，これには臨界密度より大きな密度 ε が要求されるので，明らかに密度の観測とは矛盾している。

宇宙の初期段階では途方もなく強い圧縮状態によって極めて高い温度が生じ，物質は強く電離して輻射と結合し，そこで熱化(thermalization)が行なわれる。この熱輻射は宇宙の膨張につれて冷却するが，共運動系の中では，常に等方な黒体輻射の背景として存在している。このような輻射が実際に，2.7 K に観測されたという事実は[4]，宇宙初期の高密度状態の仮説を支持する注目すべき事柄である。この温度を用いると，初期には 光子/バリオン 比は 10^9 という高い値にまでなり，特異点以後 10^3 年までは，宇宙は輻射が優勢であったと計算できる。この輻射のエントロピー密度は光子密度に比例して R^{-3} のように変化するので，(相互作用を無視すると)膨張中の光子あたりのエントロピーは一定である。この 光子/バリオン 比は極めて高いので，宇宙は本当に熱かったと考えなければならない。そうすると，現在の我々のまわりのすべてのエントロピー生成過程は人間生活に必須なものも含めて，世界のはじめから存在しているエントロピー量に比べて，極めて微々たるものである。

4.3　ハッブル則と地平

1.4 節で局所系の中では宇宙は一様に膨張しているように見える，ということを簡単に述べた。このことは，世界の大きな尺度での状態は宇宙時間 t の一関数によって標示できることを意味している。この関数とは，座標とと

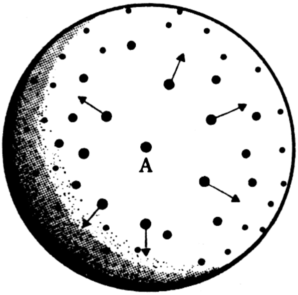


図 4.2 膨張する風船のモデル （膜面が伸びるにつれてすべての点は他の点から互いに遠ざかる。ある一点たとえば A は，実際には点が均等に分布しているとしてもなお，自分が膨張の中心にあるように思うだろう。宇宙の特異条件は，“風船”が全くの点に収縮することに対応している。）

もに動く観測者間の距離を表わすスケール因子 $R(t)$ である。この膨張をやさしく理解するには，すべての方向に一様に引き伸ばされつつあるゴムの膜で表わされるような3次元空間を想像すればよい(図4.2)。銀河集団を膜上の点とすると，すぐにわかるように，どの点もそのまわりのすべての点から遠ざかるように見える――このような点はすべて自分自身を上の膨張系の“中心”にあるかのようにみなすだろう。

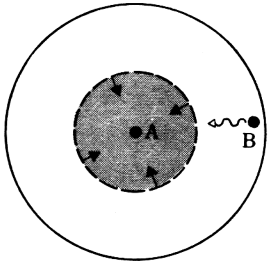
ゴムの膜による類推は，曲率のあるモデルを表わすのにも用いることができる。たとえば，一つの球殻(風船)が膨らんでそしてしぼんでゆくというのは，振動モデル $k=+1$ の正曲率と有限体積に対応している。

そこでもし膨張が一様ならば，ある距離にある2点は，その距離の1/2のところにある点が遠ざかるよりも，2倍の速さで遠ざかることになる。もし我々の宇宙全体を，共運動系の中で一瞬に見ることができるならば，我々は遠い銀河の後退速度 v がその距離 r に比例することを見出すであろう。すなわち

$$v=Hr \tag{4.14}$$

である。ここで H は時間の逆数の次元をもつ定数で，それはまさに $\dot{R}/R$ である。

実際問題として，我々の世界の全3次元空間を同時に見ることは不可能である。現実に見られるものは，観測点からの後向き光円錐上の点のみである。したがって，膨張がどこでも一様であるとしても，遠い物体からの光の



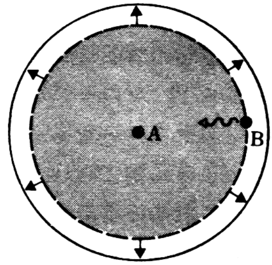


図 4.3 (a) 事象地平 (破線円は $t=\infty$ でちょうど A に到達した光の波頭を表わす。B からの光子は永久に観測されないだろう。) (b) 粒子地平 (破線円は創成事象で A から放出された光の波頭を表わす。この波頭が B を横切るとき，A での観測者は初めて B を観測できる。)

伝播による遅れは極めて大きく，膨張率 H はその間に変わっているかも知れない。[R は時間の関数であり，$R \propto e^{Ht}$ でない限りは，H は時間に依存することを思い起こそう。] しかし，小さな尺度では(4.14)は近似的には正しく，遠い銀河系のスペクトルの赤方偏移の観測から，ハッブル(Hubble)によって 1929 年にはじめて確かめられた[5]。それで，H はハッブル定数といわれるもので，H^{-1} は宇宙年齢程度であり，ハッブル時間と名づけられている。

宇宙膨張が光の伝播に及ぼす影響は興味深い。図 4.3(a)の波線は，我々の銀河とみなした点 A の方向に，遠い銀河 B から放出された一つの光子を表わすとする。膨張のために A と B は互いに後退しているので，その光子は決して我々に到達しないということが起こりうる。もしそうならば，宇宙の中には我々には永久に観測されない事象があることになる。これらの事象は，$t=\infty$ で我々に収束する光子の球面によって，観測可能点と隔てられている。そこでこの面を事象地平(event horizon)とよび，光速で我々から後退している銀河の領域であると大まかに考えてもよい。膨張率 $\dot{R}$ が常に加速的である($R \propto e^{Ht}$)定常モデルには，事象地平が存在する。

B からの光子が $t=0$ での創成事象によって放出されたとすると，膨張によってそれはまだ我々に到達してはいないが，最終的には到達するということもありうる。そのとき我々ははじめて B を観測し，B もまた我々をはじめて観測することになる。このことから，創成事象で我々の銀河から放出された光の波面は〔図 4.3(b)を見よ〕，他の銀河を 2 種類にわけることになる。

すなわち波頭の内側にあるものはすでに観測可能なものであり，波頭の外側のものは宇宙の有限時間のためにまだ観測できないものである。4.2節で述べたフリードマンのモデルは，この種の地平——粒子地平(particle horizon)とよばれる——をもってはいるが，事象地平はもっていない。

地平によって隔てられている事象は，互いに因果的に影響し合うことはできない。これらの事象は，初期宇宙の密度の乱れやブラックホールの議論では重要になってくる。

4.4 簡単なモデルの熱力学，可逆サイクル

ミンコーフスキー計量からロバートソン-ウォーカー計量の空間に移ると，宇宙論によって熱力学の問題の中に，いくつかの新しく重要な問題が入ってくる。4.2節に述べたフリードマンのモデルは，ピストン-シリンダー装置の中の気体の断熱膨張にどこか似ているところがある。特に興味深いのは閉じたフリードマンのモデルである。これは R がある極大値まで膨張した後，周期的な形で収縮することが，ピストンを上げたり下げたりするのとよく似ている。しかし，この種の実験装置からもたらされる結論を宇宙論にまで引き上げるのには相当の注意が必要である。そのうちの重要な相違のいくつかは，トールマン(Tolman)による極めて理想化された二つのモデルを見ると明らかであろう[6]。

第一のモデルでは，宇宙は黒体電磁輻射か，相対論的流体によって一様に満たされていると仮定する。波長 λ は膨張因子 $R(t)$ とともに増大するので，輻射の周波数 ω は時間の関数であり，

$$\omega \propto R^{-1}(t) \tag{4.15}$$

となる。これが，4.3節の赤方偏移の基礎となっている。同様に，輻射温度 T_γ は平均周波数に比例するので，その関係は次のようになる：

$$T_\gamma \propto R^{-1}(t) \tag{4.16}$$

すべての波長が同じ割合で変わるので，周波数間のエネルギー分布(スペクトルの形)には膨張による影響はない。黒体輻射のエントロピー密度は熱力学からの公式 $(4/3)aT_\gamma^3$ によって与えられ，定数 a はシュテファン(Stefan)の定数といわれるもので，その数値は $7.6\times10^{-15}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}deg^{-4}}$ である。そこで(4.16)からわかるように，共運動体積中のエントロピーは一定となる。[相対論ではエントロピーを共変的に定義しなければならないが，その近傍だけで実験を行なう共運動観測者に対しては，それもふつうの定義に帰着する。

参考文献7を見よ。] いいかえれば宇宙膨張は，相対論的流体のエントロピーを変えない，ということになる。これは，輻射を満たした空洞の任意の膨張はエントロピーを変えないという実験状況と同じである。しかし読者は，膨張という運動を輻射の運動と混同しないよう注意されたい。実際の宇宙では, その中に輻射が閉じ込められていると見なせるような, **有限の**(bounded)共運動体積は存在しない。むしろ逆に，体積を囲む2次元の透明で見えない面を想像すると，光子はたえず内側から面を通して逃げていることになる。しかし，もし宇宙が均一に輻射で満たされているなら，光子はその体積に外から同じ割合で入っていて，任意のこのような体積中の光子の平均数は一定に保たれるであろう。実際, 光子密度を ρ_γ とするとこれは $\varepsilon_\gamma\omega^{-1}$ に等しく，(4.13)と(4.15)から，R^{-3} に比例するので

$$\rho_\gamma R^3 = 一定 \tag{4.17}$$

となる。

トールマンの第二のモデルは非相対論的粒子によって満たされた宇宙で，たとえば1原子理想気体のようなものである。この場合も膨張によって気体の速度分布は変わらない。長さの尺度が変化しても速度は同じ割合で変わるだけだからである。非相対論的気体に対しては速度分布と運動量分布とは一致し，もし気体がマクスウェル分布の熱平衡状態にあるならば，それは平衡状態にとどまり，エントロピーは変わらないであろう。これは次のように簡単に示すことができる。個々の粒子のドゥ・ブローイー波長は $R(t)$ とともに増大するので, この単位系での運動量 $2\pi\lambda^{-1}$ は R^{-1} のように変化する。したがって運動エネルギーは R^{-2} のように変わり，気体の温度 $T_{\rm m}$ は平均運動エネルギーに比例するので，これもまた R^{-2} のように変化するはずである：

$$T_{\rm m} \propto R^{-2}(t) \tag{4.18}$$

この結果は(4.16)に対応するものである。ここで，体積 R^3 の中の1原子理想気体のエントロピーは，熱力学から $\log(R^3 T_{\rm m}{}^{3/2})$ に比例することが知られているので，これは(4.18)によって一定となる。

式(4.18)は純粋に量子力学的な結果というのではなく，それは次のような意味である。膨張宇宙の中で任意に動いている古典的粒子は，局所的共運動系からは常にエネルギーを失いつつあるように見える。いま速度 v のこのような粒子をこの特定の基準系の中に考えると，時間 $\mathrm{d}t$ の後，それは $v\mathrm{d}t$ だけ新しい位置に移動している。そこでの局所的基準系は宇宙膨張のために最初の基準系に対して元の位置から $\dfrac{\dot{R}}{R}(v\mathrm{d}t)$ の速さで遠ざかり，方向には

関係のない膨張運動となっている〔式(4.14)〕。したがって新しい位置での共運動観測者に対して，この粒子速度は $\mathrm{d}v=-\dfrac{\dot{R}}{R}(v\,\mathrm{d}t)$ だけ減少していることになる。これを積分すると $v \propto R^{-1}(t)$ となり，これから(4.18)が導かれる。

式(4.18)とその結果としてのエントロピー保存は，分子間衝突には無関係であることに注意することが大切である。膨張の時間尺度と比べうるほどの有限な緩和時間(衝突時間)を気体はもたないので，結論は準静的膨張のみに限られることはない。実際，(4.18)はふつうの熱力学からも容易に見出される。理想気体の温度は，断熱的経路に沿って，体積 R^3 と $T_m(R^3)^{\alpha-1}=$ 一定の関係にある。ここで α は主比熱の比であり，1原子気体では $\alpha=5/3$ なので，ただちに(4.18)が導かれるのである。

これらの結果を可逆性の観点からながめてみよう。非相対論的流体モデルでも相対論的モデルでもともに，ある共運動体積中の全エントロピーは一定である。再収縮のフリードマンのモデルでは，$R(t)$ は最終的には，温度とエントロピー密度が前と同じになるようなある特定の値にもどる。そのため，これらの理想化されたモデルは巨視的には**可逆**であるとよびたい気がする。実際に，膨張期にはどの観測者も彼の局所近傍から空間のより冷たい彼方に向かって見かけ上非可逆なエネルギーの流れを見ることであろう。しかし，続いての再収縮は流れを逆転するので，元の状況が復元することになる。

実験室での熱力学では，非相対論的物質の断熱膨張は，それが同時に準静的(無限にゆっくりと遂行される)であるときのみ，エントロピーは変わら

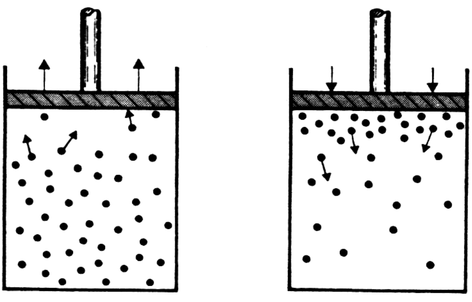


図 4.4 有限な速さのピストンによる気体の膨張と収縮 (気体分子の運動は常にピストン運動より少し遅れているので，平衡が破れてエントロピーは増大する。宇宙論の場合には，膨張は全体にわたって一様に起こり，平衡は維持されてエントロピーは一定にとどまる。)

ない。宇宙論的な場合には膨張は有限な割合で起きているので，一見勝手が違うように見える。そこでピストン－シリンダーの断熱膨張でのエントロピー増加の原因を考えてみよう[8](図 4.4)。まず，容器の可動部分の間には摩擦がある。次に，急激なピストンの運動は乱れと温度勾配を生じ，平衡にもどったときエントロピーが増加する。最後に，気体の緩和時間は有限なので，引き上げられたピストンの裏側の圧力は他のところより低くなる。広がった空間に分子が走り込むのに有限な時間がかかるからである。気体を圧縮するときは(ピストンの下側の圧力は他のところより今度は高い)，膨張によって得られた以上の仕事を要する。熱力学の第 1 法則によれば，この余分の仕事は熱として現われ，したがってまたエントロピー増加となる。

宇宙論的膨張や収縮の間にはこれらの効果は何にも起こらない。運動は常に平衡の条件下で進行しているからである。明らかに可動容器もないし，膨張による熱や圧力の勾配もない。もしあれば，それは仮定した流体の均一性と矛盾する。膨張は宇宙媒質にわたって一様に起こっているとするのである。

宇宙の内容を均一単成分流体として扱うのは，明らかに過度の簡単化である。もう少し現実的なモデルは，非相対論的物質とともに電磁輻射が一様に満たされた宇宙であろう。その間に相互作用がないとすると，二者の間の温度差は宇宙膨張につれて大きくなるだろう。なぜなら物質は輻射より早く冷えるからである〔(4.16)と(4.18)を見よ〕。もし相互作用の“スイッチ”が入ると，エネルギーは輻射場から物質へ流れて温度を等しくしようとする(この等温化が達成されるかどうかは 7.1 節で論じる)。もし膨張の時間尺度が等温化時間より短いなら，この熱の流れは非平衡の下で起こることになり，エントロピーは増加するであろう。さらに，膨張につづいて収縮が起こるなら，反対向きの熱の流れが生じて，これもエントロピー増加を伴うことになる。

極めて簡単な流体の場合でも，もっと違ったエントロピー増加の過程が存在する。R が小さな値のとき物質は部分的には相対論的なので，膨張は平衡状態のエネルギー分布を変え，気体が緩和するにつれてエントロピーは増大する。現実的なモデル，たとえば水素ガスの場合には，イオン再結合とか分子生成などの過程もあり，これもエントロピーを増大させるであろう。ある場合には，これらの過程の緩和時間は膨張の時間尺度より大きいかも知れない。

4.5 星の光のエントロピー——オルバースのパラドックス

前節に論じたような過程からくるエントロピー密度の増加は，数値的には極めて大きいものであるとしても，地上の観測者としての我々に意味のある非可逆現象との関連には疑問がある[9]。我々の周辺での最も重要なエントロピー源は，太陽による電磁波の定常的な生成である。これが定量的に最も豊富な源のみならず，定性的にも最も重要であるのは，地球上の生命の存在そのものが，このエネルギーの流れがつくりだす熱力学的非平衡に依存しているからである。

太陽がエントロピー増加の一つの源であるというのは，太陽がその周囲とは非平衡条件の下にあることから明らかである。太陽の中心温度は数千万度に達するが，表面温度は数千度にすぎず，周囲の空間の温度は 3 K という低さなのである(4.2 節)。それで太陽の中心から表面および周囲の空間に向かい，この大きな温度差に沿って連続的なエネルギーの流れが起きている。このエネルギーの移動は，核融合による中心核の静止質量の消費によって維持されている。特に，核融合反応中の“燃えている”水素が最大のエネルギーを供給していて，これは星の生命の初期の安定時期にあたっているもので，太陽中心部の高温によって陽子は互いのクーロンポテンシャルの障壁を越えて，一連の核反応でヘリウムをつくるという核融合の結果である。たとえば次のシリーズは，陽子－陽子の連鎖反応として知られている：

$$\mathrm{p(p,\ \beta)D}$$
$$\mathrm{D(p,\ \gamma)He^3}$$
$$\mathrm{He^3(He^3,\ 2p)He^4}$$

これらの反応の結果，反応にあずかった，いわゆる“料理された(cooked)”陽子の静止質量の約 1% がエネルギーとして，γ 線とニュートリノの形で解放される。ニュートリノは太陽の中からすぐにとび出し，ニュートリノに対して透明な太陽の外層とほとんど相互作用しないで空間に去ってゆく。このニュートリノはエントロピー増加の主要な部分とはなっていない。［これは次の事実からもわかる。すなわち，ニュートリノの量子数は保存されるので，光子とか重力子のようには，より低いエネルギー状態にある多くのニュートリノに非可逆的に分かれることはできない。］ 他方 γ 線は太陽内部の高密度で高電離状態の粒子と強く結合する。特に，電子によるコンプトン散乱に対する平均自由行路は極めて短いので，この γ 線のエネルギーでは，太陽表面に到達するまでに何百万年もかかることになる。その間に無数の相互作用が

起こり，そのたびにエネルギーはより多くの光子に散逸され，この電磁エネルギーが太陽表面から出るときには，それは MeV 程度の γ 線の形ではなく，エネルギーが元の 10^{-7} 程度に減った可視光領域の光子となっている。このことから太陽(もしくは同種の星)の中で反応したすべての陽子は 10^7 個の星光子(starlight photon)をつくりだすことになり，各光子は新しい1自由度を形成しているので，これは約 10^7k のエントロピー増加となる。また，これらの星光子は最終的には銀河物質や銀河間物質と相互作用するので，エントロピーはさらに増加することになろう。しかし銀河間空間での平均自由行程はおよそハッブル半径(10^{28} cm)程度なので，前節で論じた過程と同様に，この増加は極めてゆっくりとしたものである。しかし銀河による吸収は短い期間で考えるときには重要で，冷たい地球で止められた光子は，直接間接に，気象変化，雪どけ，腐食，生物的生長などの日常なじみ深いエントロピー増加を起こしている。

星からの光の熱力学的性質は，よく知られたオルバースのパラドックスと密接に関連している[10]。パラドックスのはじめは，無限に広がった静的ユークリッド空間と一様な密度の光を放つ物質との問題であった。もし我々がこのような宇宙に住んでいるなら，どこを見ても必ず星が見えるので，空一面が太陽の表面のように明るく見えることになろう。この議論では星までの距離は関係しない。なぜなら，ある観測物体の全光度は観測者からの距離の2乗に逆比例するが，その表面積もまたそうであり，光を放つ単位面積あたりのエネルギーは距離に無関係となるからである。したがって，上のような簡単な宇宙モデルは夜空の暗いことを説明できないということになる。

同じ結論は，観測者をとりまく次々の同心球殻内の星からの光束を考えても得られるであろう。光源が空間に一様な密度で分布しているなら，半径 r で厚さ $\mathrm{d}r$ の球殻中の光源の数は $r^2\mathrm{d}r$ に比例し，また与えられた光源からの光束は r^{-2} に比例する。[この論法は空間の曲率に影響されない。曲率は両方の比例定数に入っていて効果は相殺する。] したがってすべての球殻からの寄与はどんな距離でも同じとなり，無限宇宙のモデルでは光束は当然発散することになる。しかし実際には星によって輻射が再吸収されているのであろうから(上の論法では光源の表面積が重なり合っていることに対応する)，この論法は完全に正確とはいえないが，星は極めて高い温度の空間と平衡しているということになるであろう。

“パラドックス”は，用いたモデルの静的，無限大，一様性という性質に

由来することは容易にわかる。この矛盾を解決するには，宇宙の有限な年齢か充分に早い膨張(あるいはその両方)のモデルを用いればよい。これは，共運動体積 R^3 の中での光源を離れた輻射の断熱膨張を記述している式(4.12)をみるとよくわかる。光源の影響を見るには，密度 ρ で光度 L の星の光のエネルギー放出速度の項を付け加えればよい：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_\gamma R^3)+\frac{1}{3}\varepsilon_\gamma\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}=L\rho \tag{4.19}$$

この式を過去について積分して，(現在の)時間 t での全輻射エネルギーが得られる：

$$\varepsilon_\gamma(t)=R^{-4}(t)\int^t L(\tau)\rho(\tau)R^4(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.20}$$

もし星(または銀河)の数が変わらないなら，ρR^3 は一定で積分から外して，次のようになる：

$$\varepsilon_\gamma(t)\propto R^{-4}(t)\int^t L(\tau)R(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.21}$$

式(4.21)の右辺は R が充分に早く増大すれば常に収束するであろう。たとえば一定光度 L の光源群をもつ宇宙では，$R\propto t^{1/3}$ かそれより早ければ，積分の下限を $-\infty$ としても収束する。物理的には，遠い銀河系は膨張による赤方偏移を示すので，ある点でのエネルギー密度への寄与はその点からの距離につれて次第に減ってゆき，発散が避けられる。また，もし積分下限を有限とすると，$R=$一定 という静的宇宙(すなわちオルバース モデル)に対しても(4.21)の右辺は常に収束する。この場合に発散が避けられるのは，宇宙年齢の間に光が伝播した距離を半径とする球の彼方を，観測者は見ることができないからである。

実際の光源が有限な表面積をもっていることはすでに述べた。そこで，もし観測者の視線を充分遠くまで延ばすと，光源は重なって見え始めるはずである。こうして，ある距離(r_0 としよう)を越えた光源は手前の光源によってかくされる。すなわち，観測者はどうしても r_0 を越えて見ることはできなくて，したがって発散はないであろう。けれども，もしも宇宙年齢の間の光の伝播距離が r_0 に等しいなら，夜空はやはり星の表面ぐらいに明るく見えて，観測と矛盾する。r_0 を計算するために星の表面積を A と仮定すると，半径 r の球殻の中の星の数は $4\pi r^2\rho\,\mathrm{d}r$ なので，光源によって覆われている殻面積の割合は $A\rho\,\mathrm{d}r$ となる。すべての球殻を重ね合わせて，この割合が1のときは，光る物質によって覆われる空の全立体角は 4π となる：

$$A\rho\int_0^{r_0} \mathrm{d}r=1 \quad \text{すなわち} \quad A\rho r_0=1 \tag{4.22}$$

距離 r_0 を伝播するのに要する時間は，したがって，$c=1$ の単位では $(\rho A)^{-1}$ となる。このため静的ユークリッド的一様宇宙は，その年齢 t が $\ll(\rho A)^{-1}$ の時のみ，夜空の暗さと矛盾しないと結論できる。$\simeq(\rho A)^{-1}$ 以後の年齢では星々は，星の表面温度ほどの空間温度をもつ断熱的な容器として作用する。これは熱平衡の条件なので，$(\rho A)^{-1}$ は，星の光の放出に対する宇宙の**緩和時間**の目安となる。

この結果はおそらく，一般式(4.19)によって，より良く理解できる。もし二つの星が重なり合うと，より遠い星の光は近いほうの星に吸収されて見えなくなる。したがって，星の光の吸収に関する項が右辺に含まれるべきで，その項が，(4.21)からどんな発散も除いてしまうであろう。この量の上限値は，輻射の放出速度と吸収速度が等しいという平衡状態によって決められる。一定光度の星のエネルギー放出速度は L なので，時間 t の後の星の光のエネルギー密度は $L\rho t$ である。平均表面積 A の星に対する吸収速度は $L\rho tA$ で，これが放出速度 L に等しいとき平衡となる。この平衡は $t\simeq(\rho A)^{-1}$ で起こり，これがすでに見出した上記の結果である。

以上の結果を要約しよう。一定光度の星で均一に満たされている静的宇宙では，星は冷い空間の中の局所的熱源のように振る舞う。星の光が空間に蓄積されるにつれて，空間の温度はだんだんに上がり，すべての星が，そのエネルギーを放出するのと同じ速度でそのまわりの空間からエネルギーを吸収するようになって(これはオルバースが避けようとした状況である)，最終的に平衡状態が達せられる。この条件が近づくにつれて，系のエントロピーはその一定極大値をとることになる。他方，もし宇宙半径が $t^{1/3}$ より早く膨張すると，星がどんなに永い間エネルギーを放出しても，この平衡は決して到達されないで，星のまわりには常に温度勾配があるであろう。

この過程の緩和時間に対する一つの算定をしてみよう。宇宙の現在の状態では，粒子地平内の $(10^{28})^3\,\mathrm{cm}^3$ の体積の中に約 10^{20} の星があり，星の存在する平均密度は $10^{-64}\,\mathrm{cm}^{-3}$ である。太陽を典型的な星とすると，表面積は $10^{23}\,\mathrm{cm}^2$ 程度であり，緩和時間 $(\rho A)^{-1}$ は 10^{30} 秒(10^{23} 年)となる。この値は，どんな宇宙年齢よりも途方もなく永いということに注目しよう(ハッブル時間は約 10^{10} 年である)。こうして，非平衡が存在しているという条件だけで，宇宙の膨張は星の光の放出には関連しないといえる。

宇宙膨張と星の光のエネルギーの流れとの関係を全く誤解した人々がいたようである[11]。4.4節に，輻射で均一に満たされている宇宙のエントロピーは，膨張によって変わることはできないことを示した。局所的観測者にとっては，その空間領域では膨張によって非可逆的な輻射の流れと見えるものも，実際は可逆的である。すなわち，それにつづく再収縮では，輻射が流れもどるにつれて同じ温度と光子密度とが回復されるだけのことである。これは星の光の放出との著しい違いであって，星の光もまた，その星の近くの局所観測者にとっては，その空間領域から逃げる輻射の非可逆的流れのように見えるが，この場合は本質的に非可逆である。なぜなら，後者では光子がつくられているのに対し，前者では光子が保存されているからである。すなわち星の光の放出はエントロピーを生み出していることになる。それは，均質からの局所的ずれに結びつく非平衡化の中で起こっているからである。

星の光の非可逆性は，閉じたフリードマンのモデルの中で起きるような，膨張につづく再収縮の結果を考えることによって，うまく示すことができる。上に注意したように，R の変化は星の光の放出には影響しないので，星の輻射放出は収縮が始まった後も同じようにつづくであろう。もちろん，空間での輻射エネルギー密度は体積が収縮するためにだんだんと増加してゆくが，最終に近い高密度状態になるまでは，温度が星の表面温度までに達することはないであろう。リース(Rees)は[12]，星が輻射熱によって蒸発する前に衝突によって破壊されるであろうことを示した。したがって，収縮期では膨張期になされた変化を逆にたどることはない。事態は逆行ではなく，進行しているのである。これは局所観測者にとってはよくわかることで，収縮の開始時にはその人は何も著しい変化を見出さないであろう。すなわち遠い銀河は赤方偏移したままである。これは光がその距離を通過するのに時間がかかるからである。ただ近くの銀河だけは青方偏移を始めるであろう。そこでこの観測者は，より遠くの銀河が何百万年もたってから青方偏移を始めるまでは，収縮について思い及ばぬことだろう。星の光のこの非可逆性や別の非可逆性が，前に述べた閉じたフリードマンのモデルのもつ厳密な可逆性を成り立たせないのである(7.3節と7.4節参照)。

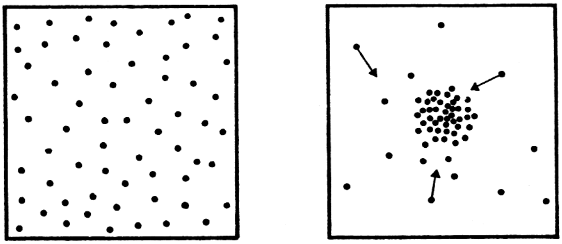
4.6　エントロピーと重力

エントロピー増加の現象に対して重力は二重の意味でかかわりがある。一つは，重力凝集によって宇宙流体の中に密度乱れが成長して星という不均一

構造を生むが，星は光を出してエントロピーをつくりだす。第二に，重力凝集と重力崩壊はそれ自身でエントロピーの増加をもたらすものであるということである。

熱力学を自己重力系(self-gravitating system)に適用することは，充分に意味のあることではあるが，それについては限られた範囲でしかなされていない[13]。重力の長距離性のために系の平衡の性質には新しい特色が現われる。短距離力だけしか受けない非重力系は，境界条件を適当にとることによって平衡を維持できる。気体の通常の平衡状態とは，一様な温度と密度状態のことである。他方，自己重力系は**内力**によってのみ平衡が保たれるので，系は“自然に”一様状態にとどまっていることはできず，崩壊していこうとする。いいかえれば，この系の自然の揺らぎは，非重力系に対する通常の $N^{1/2}$ よりもずっと大きい。形式的には，重力系のエントロピーには極大値がないので平衡状態は全くなく，完全な崩壊が可能なように思われる。しかし実際にはふつう，内力がこの進行を妨げるので，局所的なエントロピー極大が許される(図 4.5)。これらの準安定状態にもいろいろあって，たとえば，星は粒子の運動エネルギーや電子の縮退圧力によって支えられ，中性子星は中性子の縮退圧力によって支えられているなどである。

ファン・デル・ワールス状態方程式との類推に基づいた重力系の興味深いモデルが，サースロウ(Saslaw)[14] によって与えられた。彼は蒸気が凝集して液体になるという相転移と，重力流体が凝縮して個々の物体になることとの



(a) (b)

図 4.5 (a)では重力の影響を“取り外ずした”としての閉じ込め気体を描いてある。それは一様密度で平衡状態にある。(b)では相当な自己重力が働いている。粒子は新しい配位に向かって崩壊し，系のエントロピーは増加する。けれども新しい配位は擬似平衡にすぎない。もし気体が充分に圧縮されると，無限密度と無限エントロピーのブラックホール状態へ崩壊するからである。

間には，密接な類似があると考えた。このモデルでは，系は崩壊を行なうことによってエントロピーを極大化しようとする。一様密度という状態は平衡状態ではないのである。当初のなめらかな流体は激しく揺らいで，構造が成長する。ちょうど結晶の成長のように，最大のエントロピー状態は構造状態(structured state)なのである。もちろん，構造の出現(情報とか負エントロピーを表わしている)は，内部加熱や輻射過程の形でのエントロピー増加によって相殺されているのである。

重力の熱力学的理論は，一般相対論の効果が含まれなければ，本当に満足できるものではない。現実の系では内圧力の効果が崩壊を防いでいるので，系は局所的平衡状態にあるのが観測されると前に述べたが，アインシュタインの理論によると，質量が充分な密度まで圧縮されるなら，内部圧力の性質に関係なく完全崩壊することになる[15]。なぜなら，一般相対論では圧力もまた重力の源だからである。シュヴァルツシルト(Schwarzshild)半径として知られる臨界半径の内側の物体に対しては，圧力の重力効果が支持効果を越えて，全質量はゼロ体積と無限大密度に爆縮(implode)する。特異状態へ向かうこの全崩壊は，崩壊とともに落ち込んでいる観測者から見ると極めて短い時間に起こるが，漸近的観測者にとってはこの時間は無限大となる。

実際には，このような崩壊物体は事象地平によって囲まれるようになる(4.3節も参照)。どんな情報やエネルギーも，そのとき，物体から外の宇宙へ出てゆくことはない。しかしその逆向きには何でも通過できるのである。この物体の内部状態を外界から記述できる量としては，全質量と全荷電と運動量だけで，他のすべての物理量は測定不可能である[16]。このような崩壊物体からは極めて短い時間の後には光さえも逃げられなくなるので，これはブラックホールとよばれている。太陽より少し重い星のたどる一生の終点として，ブラックホールが形成されると考えられているが，現時点では，この臆測を支持する決定的な観測事実はまだ得られていない。

ブラックホールのエントロピーについては何をいえるのであろうか？　ブラックホール内部では，重力エネルギーがわけられる自由度はますます増えてゆくので，エントロピーは崩壊の間に限りなく増大するように思われる。しかし外からの観測者にとっては，ブラックホールは三つの自由度(質量，電荷，運動量)しかもっていないので，内部エントロピーの測定は不可能である。熱力学的にはこの物体は，無限大の熱容量をもつ温度ゼロの黒体のように振る舞い，温度を上昇させることなく無限の仕事を注入できることにな

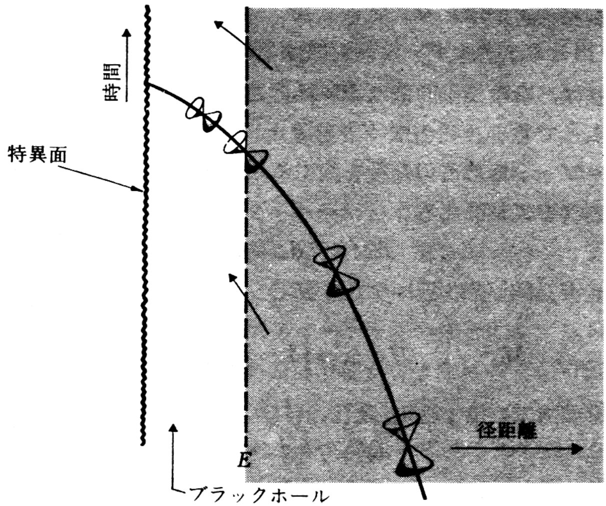


図 4.6 ブラックホール近くでの時間非対称性 (事象地平 E が一方通行の膜のように働いて，粒子はブラックホールには入れるけれども逆に外には出られない。このことが起きるのは，E に近づくにつれて，物体のまわりの空間がひずみ光円錐は一層強く傾くからである。E の内側では傾きはさらに大きくなり，すべての時間的世界線は特異点に終わる。どんなエネルギーも E を通して傾きを曲げもどすことはできない。)

る。そうすると，エントロピーがブラックホールの中に消え落ちるときはいつでも，熱力学第2法則は破られているように見える[17]。

その代わり，ブラックホールには固有の非可逆性がある。事象地平の存在はその一例で，それは外から内へのエネルギー通過を許すが，逆向きには許さない一方通行の膜の性質をもっている(図 4.6)。回転するブラックホールに生じる一つの興味深い非可逆過程がペンローズ－クリストデュロ(Penrose-Christodoulou)[18] によって論じられた。このような物体の質量の2乗 M^2 は二つの部分にわけることができる($G=c=1$ の単位):

$$M^2=M_{\mathrm{ir}}{}^2+\frac{L^2}{4M_{\mathrm{ir}}{}^2} \tag{4.23}$$

L は角運動量で，M_{ir} は以下の理由によって非減少質量(irreducible mass)とよばれる。ブラックホールの回転エネルギーを外側から取り出すような手段を工夫することは可能で，このエネルギーは(4.23)の第2項と関連がある。しかし，そのやり方が極めて特殊なもの(“可逆的”)でない限りは，必ず M_{ir}

の非可逆的増加につながり，そして M_{ir} は決して減少しないということがわかる(取り出せるエネルギーの最大値は29％である)。この結果を別のいい方で表現すれば，事象地平面積は $16\pi M_{ir}{}^2$ の形になり，それが決して減少しないということである。それでブラックホールの物理での $M_{ir}{}^2$ は，熱力学でのエントロピーと極めて似た役を演じることになる。実際に，もし(4.23)を微分すると次のようになる：

$$\mathrm{d}M = \Pi\,\mathrm{d}\sigma + \boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} \tag{4.24}$$

ここで，σ, Π, $\boldsymbol{\Lambda}$ は次のとおりである：

$$\sigma = M_{ir}{}^2 \qquad \Pi = \frac{1}{2M}\left[1 - \frac{\boldsymbol{L}^2}{4\sigma^2}\right] \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \frac{\boldsymbol{L}}{4M\sigma}$$

式(4.24)を熱力学の第1法則〔式(2.2)〕

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \tag{4.25}$$

と比べると，S は σ に，外部への仕事 $p\mathrm{d}V$ は取り出された運動エネルギー $-\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ に対応している。第2法則との類似は

$$\mathrm{d}\sigma \geq 0 \tag{4.26}$$

である。これはホーキング(Hawking)定理として知られるもので[19]，ブラックホールに起こるどんな変化(このような二つの物体の合体も含む)もホールの面積を増大させるということを表わしている。また，熱力学の第3法則との類似すら存在しているのである。

エントロピーがブラックホールに消える際に通常の熱力学第2法則が破れるが，それを防ぐために，ベケンシュタイン(Bekenstein)は新しい“一般化された”第2法則を提案した[20]。ホーキング定理の非可逆性を用いて，彼は“一般化された”エントロピー

$$S_{\mathrm{T}} = S_{\mathrm{ext}} + S_{\mathrm{bh}} \tag{4.27}$$

を定義した。ここで S_{ext} は外界の“通常の”エントロピー，S_{bh} はブラックホールのエントロピー σ である。一般化された第2法則はそのとき

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{T}} \geq 0 \tag{4.28}$$

となり，通常の第2法則とホーキング定理とを特殊な場合として含んでいる。ベケンシュタインは S_{bh} の量子力学的表現も与えている：

$$S_{\mathrm{bh}} \propto \frac{k\sigma}{l^2} \tag{4.29}$$

ここで k はボルツマン定数，l はプランク波長 $(\hbar G/c^3)^{1/2}$ であり，比例定数はだいたい96かそれより小さいことが示されている。S_{bh} は量子力学では有

限(量子力学的“箱”の有限性と関連)であるが，$\hbar \to 0$ で無限大に近づく。

最後に，一般化されたエントロピーと統計力学との関連について二，三述べよう。熱力学では，ある巨視的状態に対しては可能な多くの微視的組み合わせがあるにもかかわらず，測定は，温度とか圧力とかいう二，三の巨視的パラメタに限られている。同様にブラックホールの物理では，ブラックホールは内部的に多くの自由度をもつにもかかわらず，外部観測者の測定は，ただ三つのパラメタ M, L と電荷に限られている。第3章で述べたように，熱力学系では系のエントロピー S_{ext} の減少をもたらす揺らぎの発生は極めてまれではあるが存在する。それでブラックホールの場合にも，もちろん途方もなく長い時間が経過した後ではあるが，似たような揺らぎが可能かどうかの疑問が生じる。このような揺らぎは，ブラックホールから散逸状態(dispersed state)へのエネルギーの流れとして現われてくるかも知れない。そのときは，事象地平面積 σ が減少することになる。

しかし詳しく調べると，ブラックホールの揺らぎは不可能である。ホーキング定理(4.26)は，クラウジウスの法則(2.3)とはその立場が異なる。前者は，微視的意味においても本質的に**非可逆**法則であるが，後者は確率的なものにすぎず，極めて大きな確率としてのみ正しいのである。ブラックホール系での本質的な非可逆性の源は事象地平であり，一度粒子が地平の中に入るとそのエネルギーは再び外へは出られなくなる。地平内での経過にかかわりなく，すべての時間的世界線は特異点で終わっているのである(図4.6)。

ブラックホールの非可逆性には，第2章での非相対論的統計力学の手法は直接適用できないにしても，Γ 空間の類似性から図式的に表現することはできる。図4.7で領域 Ω を考えよう。そこでの点は自己重力系の微視的状態を表わしている。Γ 空間の場合と同様に，系の展開につれて代表点は Ω の中を動きまわる。熱力学的揺らぎはポアンカレの回帰定理によって，その領域のエントロピーがどんなに低くても，Γ 空間の点はエネルギー表面のどんな領域へも最終的に回帰できる。しかし Ω 空間では状況は全く異なっている。$\Omega' \subset \Omega$ という領域 Ω' が存在して，Ω' の中の代表点はそこから外へ出られないが，その反対に入ることは可能である。こうして Ω' の境界はブラックホール系の事象地平に対応している。Ω 空間中に近づくことのできない領域が存在することは，ポアンカレの回帰定理を破ることになる。もし系が Ω' の外側に始まって崩壊状態に陥り，点が Ω' の境界を越えて入ると，地平の外側の元の散逸状態にもどることはできない。

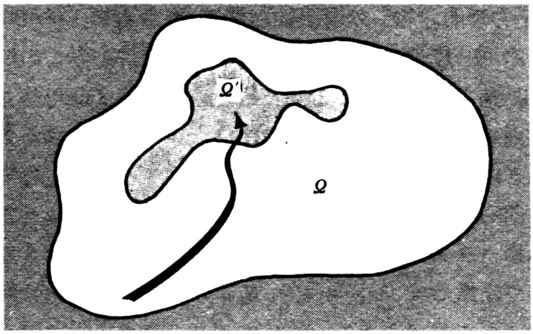


図 4.7 領域 Ω は，相対的自己重力系に適用した Γ 空間の極めて図式的な表現である。自分のシュヴァルツシルト半径の外側にあって安定している太陽のような物体は，影のない領域の中を動く点として表わされる。もしその圧力勾配が充分でなく，物体がシュヴァルツシルト半径の内側に落ち込むなら，代表点の軌跡は影の領域 Ω' に入り，そこから再び出ることができない。

この新しいタイプの非可逆性は，一見，場の方程式(4.2)の時間反転対称性と矛盾するように見えるが，それは間違いで，ブラックホール崩壊の時間反転群——“ホワイトホール”の存在——を妨げるものは何にもない[21]。実際に，フリードマン宇宙論のビッグバン(4.7節)はホワイトホールの一例である。もしホワイトホールがブラックホールと同じくらい頻繁に起こっているなら，非可逆性に対しての大域的な時間対称があることになろう。他方，ブラックホールとホワイトホールに対する境界条件は同等に起きてはいないということも充分に考えられるので，そのとき重力崩壊の現象は，我々の世界に余分な非対称をもたらしている。ともかく，ブラックホールはホワイトホールに転化できないが，ホワイトホールはブラックホールに転化できるということに注意されたい。物質保存の宇宙論では，このことだけでもある種の非対称が出てくるのである。

上の考察は，将来，重力場の量子論によってだめになるかも知れない。そこでは量子力学的揺らぎが可能で，トンネル効果によるブラックホールの“放射崩壊”さえも可能となるかも知れないのである[22]。

4.7 ビッグバン(初期大爆発)

4.1節で説明したように，局所分枝系の時間的に非対称な振る舞いには，宇宙全体にわたる熱力学的非平衡が必要であった。宇宙膨張はこのような非

平衡の一因ではあるが，この我々の領域における著しくかつ重要なエントロピー生成の主要因は，星の光の熱核反応による生成と，自己重力的な不均一化の傾向であると結論した。実際，この二つの過程のどちらにも最終的に依存しないような分枝系の形成を考えることはむずかしいが，宇宙膨張ではこの地球上に重要な分枝系がつくりだされるとは期待できないのである。したがって，我々が現実に出会う現象の時間非対称の説明は，宇宙の中での上記二つの型の非平衡の存在を納得させるものでなければならない。

宇宙論的見地から現在の低エントロピー状態を説明するのに，三つの説明があった。第一はボルツマンによるもので[23]，宇宙の正常な平衡状態からずれた極めて大きなポアンカレ型の揺らぎの中に我々は生きているというものである。このようなまことにまれな現象に我々が遭遇していることの理由は，生物物質の創成自身がその熱力学的非平衡を必要としているということに帰着する。平衡状態からは人間の存在は生じてこなかったことだろう。このような推測に対するいくつかの批判がある。まず，宇宙の**現在の**低エントロピー状態をつくりだした揺らぎは，過去の**一層低い**エントロピー状態(これは3.4節で充分に説明した)をつくりだした揺らぎよりも，ずっとずっと起こりやすいはずである。しかも過去においては現在よりもエントロピーが低かった，ということがわかる熱力学的でない理由がある。たとえば遠い銀河を観測するとき，何百万年も前に銀河は熱力学的非平衡の状態にあったものとして見えているのである。ボルツマンに対する別の批判は，地球上の生命の存在を保証するためには太陽系の大きさ程度の揺らぎで充分であり，そしてこのような揺らぎは宇宙論的規模の揺らぎよりずっと起こりやすそうだという点である。

低エントロピー状態を説明する第二のものは，熱力学的非平衡は**たえず**更新され，ある宇宙論的な方法で**維持**されているということを示そうとするものである。この種の理論の一つは，ゴールド，ボーンディ，ホイル(Gold, Bondi, Hoyle)の定常宇宙論で，7.2節でもっと詳しく論じることにする。

物質の連続的生成がないときは，4.2節のフリードマンのモデルにあるようにビッグバン型の事象を考えることが必要である。これらのモデルは有限な宇宙年齢のために，全宇宙は巨大な分枝系の一種とみなされる。それは$t=0$で低エントロピー状態につくりだされ，現在平衡に向かっているわけである。この見解に従えば，自然の中に観測される熱力学的非対称の存在は，宇宙の膨張時間に比べて，星や重力の現象の緩和時間が長いことによる

ものである。宇宙の初期の低エントロピー状態は，ふつうの分枝系の場合のようには，それ以前の平衡状態からの揺らぎによって説明できない。それは，この創成事象以前には宇宙は存在しなかったからである。しかし分枝系の場合と異なり，初期の低エントロピー状態を外部世界との相互作用によるものとすることもできない。なぜならそのとき宇宙とは全世界**である**からである。そこで，一見すると宇宙の負エントロピーは，創成のとき初期条件として“注入”されただけだという，釈然としない結論を受け入れざるをえないようである。このような結論は，創成期に近いこの特別な低エントロピー状態の存在理由を見出さない限り，誰も納得しないと思われる。さらに，低エントロピーの正確な性質を定めるためには，初期状態の熱力学的性質を吟味する必要がでてくる。

この点について一言注意を加えたい。一般相対論の式に従えば，だんだんと初期へ初期へとさかのぼるにつれて，宇宙流体の密度とエネルギーは限りなく増大する。我々の知る物理法則は有限エネルギーの範囲でのみが実験によって得られたものである。我々の理論がどんなに巧妙なものになったとしても，もっと極限的な状況ではさらに未知の物理現象があるかも知れない。過去のある段階で既知の物理法則の言葉による解析が失敗し，もしもフリードマンのモデルに起こる特異性が真実なら，すべての理論(相対論を含んで)はそこで破綻してしまうであろう。現在では，宇宙流体の密度が極めて大きくて素粒子間の相互作用が重要になるような約 10^{-23} 秒以前に対しても，既知の物理法則を適用できると信じている人はほとんどいない。しかし，極めて初期の段階についての知識があっても，時間非対称の源についての理解とはかかわりないであろう。

星の光の放出の非対称の問題を最初に扱うことにしよう。星の光は，軽い核から安定した重い元素をつくる核融合の過程によって，熱い星の内部でつくられるもので，そのとき光子とかニュートリノとかの形でのエネルギーが放出される。エントロピーを生成する光子をその源へとたどってゆくと，星はなぜ最初は軽い元素(主として水素とヘリウム)からできているかの理由を確かめなければならなくなる。鉄は物質の最も安定した形なので，宇宙はなぜすべて鉄からできあがっていないのかという疑問が生まれる。この質問に答えるには，“ビッグバン”という熱い火の玉の中での核融合の問題へ少しわき道する必要がある。

最初の創成事象に向かって時間をさかのぼりながら，宇宙流体の小さな容

積に注意を向けよう。温度は(4.16)と(4.18)に従って増大し，約 4000 K を越えると，物質は結局のところ電離してしまうであろう。物質と輻射はそのとき強く結合して熱力学的平衡に達する。光子の熱容量はバリオン(陽子と中性子)のそれより 10^9 倍も大きく，物質は(4.16)で与えられる輻射温度になってしまう。この時期には宇宙の動的な性質もまた，物質よりずっとエネルギーの高い輻射によって左右される。一般相対論によるとこのとき，温度 T と創成事象以後の時間(秒)との関係は次のようになる：

$$T=\frac{10^{10}\,\mathrm{K}}{t^{1/2}} \tag{4.30}$$

約 $t=1$ 秒のとき，光子の温度は 電子－陽電子対 をつくるに充分な温度となり，温度の増大につれてますます多くの種類の粒子がつくられて，これらすべての種類の粒子(と輻射)は，密度の増大につれて互いに平衡状態になってくる。どんな素粒子に対しても，与えられた温度 T での平衡密度を計算できる。たとえば $T=10^{10}$ K で，中性子の陽子に対する比は 15% となる。さて，$t<1$ 秒で中性子と陽子間の統計平衡は，次の弱い相互作用に依存していて

$$\mathrm{n}+\mathrm{e}^+\rightarrow \mathrm{p}+\bar{\nu}_\mathrm{e}$$
$$\mathrm{p}+\mathrm{e}^-\rightarrow \mathrm{n}+\nu_\mathrm{e}$$

このため 電子－陽電子対 の存在が必要である。$t\simeq 1$ 秒では，これらの電子－陽電子対は急速に消滅し，n/p 比は数百秒間 15% に凍結され，そのあとは中性子崩壊の結果により，この比はかなり減少する。しかしその前に，中性子は陽子と結合して重水素をつくり始めて

$$\mathrm{n}+\mathrm{p}\rightarrow \mathrm{D}+\gamma \tag{4.31}$$

となる。そして密度が充分に高いなら，この反応は極めて早く進行し，すべての中性子は重水素の中に取り込まれるであろう。しかし，この重要な反応は，温度が 10^9 K($t\simeq 100$ 秒)以下に落ちるまでは進行しない。それは新しくつくられた重水素が高エネルギー光子によって直ちに崩壊させられるからである。すなわち，10^9 K 以前では，自由中性子と自由陽子が最大エントロピー状態を表わしているが，その後は重水素が物質の平衡状態となっている。

反応(4.31)が完了するや否や，さらに早い反応が生じてヘリウムが生成される。したがって，宇宙におけるヘリウム量は $T=10^{10}$ K での凍結比によって定まってくる。15% の n/p 比では，He/H 比は約 30% と見積もられ，詳しい計算によると 27% である[24]。この比の観測値は 25%～30% で，ビッグバンを裏づける注目すべき事実の一つとなっている。

重い元素に関しては，これらの計算によると，最初の火の玉の時期には極く一部しかつくられない。この時期の粒子密度と温度に依存する反応速度は急速に小さくなり，これらの元素を多量につくるのに充分な時間がないからである。

もちろん，宇宙に存在する大量の水素の説明には，結合していない陽子はすべて陽子－陽子(p-p)反応によって燃えてしまうのではないということがその要点である。さもないと，生き残ってその後，星の中で核融合合成を行なうようにはならない。このp-p反応は極めて長時間かかるので，陽子が燃えつきるということは起こらない。このことには強い相互作用の結合定数の値が微妙に効いているのは興味深いことである。もしこの結合がわずか数パーセント大きかったとすると，2個の陽子が束縛された二重陽子の形成が可能で，それが極めて早く重水素に変化し，それからヘリウムが形成されることになろう。

我々の経験する時間非対称の，他の主な原因を次に考えてみよう。それは，重力的な密度変動の成長である。簡単な例では，地球の潮汐はこの重力による密度変動現象の一つの結果である。4.6節に述べたように，自己重力系は真の平衡の状況にはない。実験室のフラスコの中の気体ではすぐに一様な温度，圧力や化学構成に達して，それから変わろうとしないのに，宇宙流体という充分に大きな容積がこのような一様状態にあると，それは大きな重力的密度変動を行ない，重力崩壊に終わる可能性さえ存在する。

ここで，次の二つのことを区別することが大切であろう。一つは重力的揺らぎによる均一性からの**局所的**ずれであり，他の一つは，均一な宇宙流体の**大域的**な運動であって，これもまた重力場の(4.2)によって定められる。前者の場合，温度や圧力勾配や乱流などの様子に応じて宇宙流体には大きなエントロピー増加がある。後者の場合は，すでに見たように，その均一性のために共運動体積中のエントロピー変化は生じない(充分に良い近似で)。

宇宙論的観点からは，宇宙の中の多層構造の成立を熱力学的に説明するのが[25]，望ましい。宇宙の現況は，遊星，太陽系，星団，銀河，銀河集団などの構造的階層からできている。それで，世界は簡単な一様流体として構造なしに出発し，ビッグバン後の早い時期の間に流体中に生じる自然の揺らぎによって均一性からの局所的ずれが成長して現在に至ったというのが，可能性としても魅力的な考え方である。

フリードマンのモデルの中の密度揺らぎの成長の様子は，リフシッツ

(Lifshitz)[26] によってはじめて記述されたが，それをまとめてみよう。しばらくは圧力を無視し，物質により満たされたフリードマンのモデルの三つの解(4.9)を考えよう。小さな R に対しては $\eta \ll 1$ であり，R に対する三つの解は η^4 の程度しか違わない。もし宇宙流体の球状領域が少し乱されて，他よりもゆっくりと膨張する物質を含むようになるとすると，この揺らぎの領域は，より低いエネルギーの宇宙モデルに対応するであろう。このような低エネルギーモデルは，成長が遅いので，この領域は宇宙のほかの領域の膨張から次第にとり残され，揺らぎはますます成長することになろう。もしこの領域のスケール因子が ΔR だけ変わるとすると，そのとき $\Delta R \propto \eta^4 \propto R^2$ で

$$\frac{\Delta R}{R} \propto \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \propto R \propto t^{2/3} \tag{4.32}$$

すなわち，密度揺らぎは t のベキに比例して成長する。この結果は，その領域の大きさが粒子地平より大きい場合でも成立する。

実際は，圧力を無視することはできなくて，特に輻射優勢の宇宙初期には無視できない。圧力勾配のおかげで，$\lesssim c_s/(G\rho)^{1/2}$ の尺度では密度揺らぎは安定化に向かう。ここで c_s は光子気体に対する音速である。これはジーンズ波長として知られるもので，これより小さな揺らぎはどれも成長しないで振動する[27]。輻射優勢期には $c_s = c/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$ (c＝光速＝1) なので，ジーンズ波長は粒子地平距離と同じくらいである。地平より大きな尺度の揺らぎは，宇宙膨張によってそれが地平の中に入るまで成長するが，その後は振動を始めるであろう。

銀河や銀河集団の存在を説明するのに，当初は，$\sqrt{N}$ 程度の無秩序な統計的揺らぎで充分であろうと予想された。残念ながら，揺らぎの成長は膨張のために遅くなり(ベキ法則)，銀河程度の大きさの物体を説明するのにはあまりにも揺らぎが小さすぎて，粒子地平がわずか数個の原子を含んでいた極めて初期の状態から出発しない限りだめである。現在の理論では，適当な振幅揺らぎを単に初期条件として与えなければ銀河の存在を説明できないようである。

熱力学的非可逆性の立場からは，星や惑星が形成されるような小さい尺度での揺らぎのほうにより興味がある。これらの揺らぎは，物質と輻射の分離が起こるまで(～10^3 年)は輻射圧力によって安定化され，その後は物質は光子に対して透明となり，揺らぎは熱圧力によってのみ安定化されるので，ジーンズ波長は急激に小さくなる(10^7 の因子で)。それから後はジーンズ波長

はだんだんと小さくなってゆき，星などの生成が可能となる。

宇宙流体の初期の状況についての以上の話から，どんな結論が引き出せるであろうか。話を充分小さな容積に限るなら，宇宙流体は初期の頃には，**局所的**な熱力学的平衡の状態にあったというのは，かなり明らかなことである。ここでいう“平衡”は，次の二つの意味であることに注意されたい(3.1節の終わりに述べた意味づけとは全く違っている)。

1．初期へ初期へとさかのぼりながら流体の小容積に着目すると，だんだんと種類の増える粒子が互いに平衡状態となるような，一連のしきい値に到達する。たとえば，$t=10^3$ 年以前は，物質と輻射は結合して平衡状態にあり，$t=10^{-4}$ 秒以前では，ニュートリノは物質と平衡にあるなどである。エネルギーが上がるにつれて新しい型の粒子がつくられ，そして他の粒子と平衡に達する。実際に最近の推測によると[28]，初期の特異点に近づくにつれてこの過程は限りなくつづく。すなわち，無限の数のしきい値があり，無限の数の新しい粒子がつくられるようである。どの場合にも，“平衡”という言葉は，そのエネルギーで結合するようになった，限られた数の流体成分だけに関するものである。温度がその関連するしきい値より下がると，これら粒子の大部分はすぐに崩壊して安定なバリオン，レプトン，光子になるので，我々の時代の負エントロピーの担い手の問題には，何の関係もない。しかし，後者のしきい値は，今日まで生き残った安定な粒子に関連しているから重要なものである。さて，これらの安定な流体成分が分離すると，宇宙の膨張につれてそれら成分の間にエネルギーの不均衡が成長する。たとえば物質と輻射とが分離した後は，それぞれ異なる速さで冷えてゆく。もっとも，実験室系に関してはニュートリノのような粒子は問題にしないでよい。実験室の熱力学的性質は相互作用のないこの粒子によって絶えず貫かれていることを気にせずに，きちんと記述できるのである。しかし，物質が再び電磁輻射とニュートリノとの両方に強く結合するようになる局所的な特殊領域(星)があり，そこでは電磁輻射は，我々の問題とする熱力学的非可逆性にとって極めて重要である。宇宙流体が準平衡状態から出発し，そして星の光の放出などによって，以後の時間にもさらにエントロピーを増加できるというのは，一見矛盾しているようであるが，これは“平衡”という言葉を次のように意味づけることによって解決できる。

2．4.6節で述べたように，自己重力系は真の平衡状況をもたない。したがってそれは，負エントロピーを蓄える無限大の能力をもっていることにな

る。宇宙流体の場合には，このことは二つの点で重要である。第一は，密度揺らぎが重力によって成長し，均一性から局所的にずれる可能性である。初期段階で流体の小さな領域は，圧力勾配のおかげで崩壊を免れている。温度が下がるにつれて圧力勾配は効かなくなり，そして系は崩壊し，おそらくは，より大きな密度での新しい準安定状態におさまるのであろう。この崩壊の間に系のエントロピーが増加するにつれて，系の負エントロピーの無限大の容器の一部が使われる。第二は，宇宙流体はいわゆる宇宙膨張を行なっていて，大域的な尺度では，変化しつつある重力場の中にあるということである。星の光のような非可逆的過程を通じてのエントロピー増加は，7.3節において詳しく述べるような方法で，宇宙の重力場によって“まかなわれている”と考えられよう。自己重力宇宙は全体として，そのエントロピーを増加させる限りない能力をもっているのである。

以上の考察から注目すべき結論に到達する。この宇宙における**すべて**の熱力学的非可逆性の源は，最終的には重力によるものである。存在可能で，かつ2種以上の相互作用物質を含む**どんな**重力宇宙も，時間の中で非対称の**はず**であり，それは大域的な意味での運動においても，また局所的な意味での熱力学においてもともに非対称である(第7章参照)。

参考文献

1. H. Bondi: *Cosmology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960).
2. A. Friedmann: Z. Phys. 10(1922)377; 21(1924)326.
3. A. R. Sandage: The Observatory 88(1968)91; Astrophys. J. 152(1968)149.
4. A. A. Penzias and R. W. Wilson: Astrophys. J. 142(1965)419.
5. E. Hubble: Proc. Nat. Acad. Sci. 15(1929)168.
6. R. C. Tolman: *Relativity Thermodynamics and Cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1934) sec. 170, 171.
7. R. C. Tolman: 上掲6, sec. 122.
8. R. C. Tolman: 上掲6, sec. 130.
9. それにもかかわらず，これが**すべて**の非可逆性の源とされたように思われる。D. Layzer: *IUPAC International Conference on Thermodynamics, Cardiff*, ed. P. T. Landsberg (Butterworth, London, 1970).
10. H. W. M. Olbers: Bode Jb. 110(1826); Edinburgh New Phil. J., April-October (1826) 141.
11. T. Gold: Amer. J. Phys. 30(1962)403. H. Bondi: The Observatory 82 (1962)133.

12. M. J. Rees: The Observatory 89 (1969) 193.
13. たとえば，次の二つの文献である。L. D. Landau: Phys. Z. Sowjet. 1 (1932) 285. I. Prigogine and G. Severne: Physica 32 (1966) 1376.
14. W. C. Saslaw: Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 141 (1968) 1; 143 (1969) 437.
15. L. D. Landau: Phys. Z. Sowjet. 1 (1932) 285. S. Chandrasekhar: Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 95 (1935) 207. J. R. Oppenheimer and G. Volkoff: Phys. Rev. 55 (1939) 374.
16. これはいわゆるイスラエル-カーター推理の結果である。この見解を支持する仕事の文献は次の中にある。J. D. Bekenstein: Ph. D. Thesis, Princeton University, 1972. または，R. Ruffini and J. A. Wheeler: Physics Today 24 January (1971) 30.
17. C. W. Misner, J. A. Wheeler: 私信. J. D. Bekenstein: Ph. D. Thesis, Princeton University, 1972, pp. 108, 131.
18. R. Penrose: Rivista del Nuovo Cimento ser. 1, 1 (1969) 252. D. Christodoulou and R. Ruffini: Phys. Rev. (D) 4 (1971) 3552.
19. S. W. Hawking: Comm. Math. Phys. 25 (1972) 152.
20. J. D. Bekenstein: Ph. D. Thesis, Princeton University, 1972.
21. ホワイトホールという言葉はR. ペンローズ(Penrose)によって the Fifth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics (December 1970) で，初めて用いられたと思われる。さらに次の中の注意を参照せよ。B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano and J. A. Wheeler: *Gravitation Theory and Gravitational Collapse* (Univ. of Chicago Press, Chicago & London, 1965) chap. 11.
22. B. K. Harrison, et al.: 上掲 21, chap. 11.
23. L. Boltzmann: Nature 51 (1895) 413.
24. R. V. Wagoner, W. A. Fowler and F. Hoyle: Astrophys. J. 148 (1967) 21.
25. 重力系は構造を熱力学的に成長させる傾向があるという事実にもかかわらず，付加的な特殊原理がレイザーによりつくられた。D. Layzer: "A unified approach to cosmology" *Lectures in Applied Mathematics*, ed. J. Ehlers (American Mathematical Society, Providence, R. I.) vol. 8, p. 237; "The strong cosmological principle, indeterminacy and the direction of time" *The Nature of Time*, ed. T. Gold (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1967). P. T. Landsberg: Studium Generale 23 (1970) 1128.
26. E. Lifshitz: Zurn. Eksp. Teor. Fis. 10 (1946) 116. 総説は，E. R. Harrison: Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 862, および M. J. Rees: Some current ideas on galaxy formation" *General Relativity and Cosmology*, ed. R. K. Sachs (Academic Press, New York, 1971).
27. J. H. Jeans: *Astronomy and Cosmogony* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1928).

28. R. Hagedorn: Suppl. Nuovo Cimento **3** (1965) 147; Nuovo Cimento **56A** (1968) 1027.

より進んだ読者には

1. 宇宙論の熱力学的側面の明快な説明は，次の文献にある。R. C. Tolman: *Relativity Thermodynamics and Cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1934). D. W. Sciama: *Modern Cosmology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971).

2. エントロピー概念の全宇宙への適用には，ある人々は疑念を表明している。K. P. Stanyukovic: "On the increase of entropy in an infinite universe" Dokl. Akad. Nauk. SSSR **69** (1949) 793. L. Tisza: Math. Rev. **12** (1951) 787.

3. ブラックホールについての最近の総説は，R. Ruffini and J. A. Wheeler: "Introducing the black hole" Physics Today **24** January (1971) 30. 崩壊中の星が有限時間の後でさえも，"真"のブラックホールとしてなぜ扱われるかについては次の文献を見よ。C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler: "Why black hole" *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973) sec. 33.1; "Reversible and irreversible transformations of black holes" sec. 33.8.

4. エントロピーとブラックホールに関する最近の情報については次の文献を見よ。J. D. Bekenstein: Lettere al Nuovo Cimento **4** (1972) 737. L. Basano and A. Morro: Lettere al Nuovo Cimento **6** (1973) 193. W. Israel: Lettere al Nuovo Cimento **6** (1973) 267. C. W. Misner, et al.: 上掲 3.

5. この章で提起されたいくつかの問題に対する異なるアプローチは次の文献を見よ。K. K. Popper: "Time's arrow and entropy" Nature **207** (1965) 233. 次も参照せよ。W. Buchel: "Entropy and information in the Universe" Nature **213** (1967) 319. B. Gal-Or: "Are the astrophysical and statistical schools of irreversibility compatible?" Nature **234** (1971) 217. J. Merleau-Ponty: "Temps et cosmogonie" *Cosmologie du XX^e Siècle* (Gallimard, Paris, 1965).

5
電　磁　波

5.1　遅延場と先進場

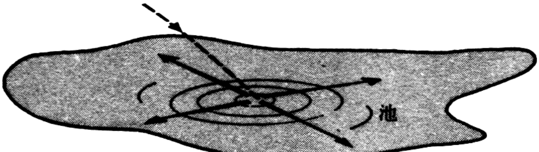
第2, 3, 4章では，もっぱらエントロピーや熱力学に関する時間に非対称的，および非可逆的現象の性質や起源を理解するようにつとめた。**非熱力学的現象**の中にも時間の中で非対称的に振る舞う現象があるかどうかを自問した読者もいるであろう。実際，そのような重要な過程が身近な現象として存在し，熱力学的な非可逆性を伴ってはいるが，それとは別の固有の非対称性をも示しているようである。

第一の例は，池に石を投げこんだときに見られる円形波列で，これは衝撃の地点から池の端へと外向きに広がってゆく。しかしそのとき，逆に池の端を出て衝撃地点に，衝撃と同時に収束するような波を見るなどということは思いもよらぬことである(図5.1)。同様に，無線で遠方と通信するとか，ある距離を置いて呼びかける場合，相手が無線や声を受けるより先きにそれを知るとは思えないし，当然，電波や音波は機械や口から外に出た後に遠い地点に届くものと我々は思っている。ここで，この“先・後”関係というのは，エントロピー増加の向きの意味でもある。

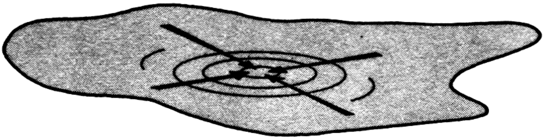
数学的には，上の三つの物理的過程は水の表面波，電波，音波というように，すべて波であるという特性をもっている。平坦な空間の中を伝播する波の式は，周知のように

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi(\boldsymbol{r},\, t)=4\pi\rho(\boldsymbol{r},\, t) \tag{5.1}$$

である。ϕ は時空点$(\boldsymbol{r},\, t)$での波の振幅，ρ はその点における源の密度，c は



(a)



(b)

図 5.1 (a) 乱れの中心点から発散する円形波の模様で，乱れはたとえば石を投げ込んだようなものである。(b) 時間反転の状況を表わすもので，コヒーレントな円形波が中心点に向かって自然に収束している。この現象は決して観測されるとは思われない。

波の速度である。簡単のため，最初は非分散で非吸収の媒質を考えると，c は一定である。

式(5.1)は3次元のよく知られた解[1]をもつ：

$$\phi_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{\text{全時空}}\frac{\delta\left(t'+\dfrac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}-t\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}',\ t')\,\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}t' \qquad (5.2)$$

δ はディラックのデルタ関数で，次のような特性をもつ。すなわち(5.2)の t' の積分を行なうと

$$\phi_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r},\ t)=\int_{\text{全空間}}\left[\frac{\rho(\boldsymbol{r}',\ t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]_{\mathrm{ret}}\mathrm{d}^3r' \qquad (5.3)$$

が得られる。そこで $[\quad]_{\mathrm{ret}}$ は，時間 t' を**遅延**(retarded)時間 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ として計算するという意味である。この遅延が表わしているものは，時刻 t，位置 $\boldsymbol{r}$ での乱れは $\boldsymbol{r}'$ にある源によって起こされるもので，それは同時刻 t ではなくて，それより前の t' における源によっているということである。その差は，間の距離 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ を速度 c で乱れが伝播するための遅れとして説明される。全体の乱れ $\phi_{\mathrm{ret}}(\boldsymbol{r},\ t)$ は，(5.3)で与えられるように時間的には前の源によるものの1次の重ね合わせである。

しかし，(5.1)の別の解が(5.2)の中の $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ の符号を反転して得られる：

$$\phi_{\text{adv}}(\boldsymbol{r},\ t)=\int\left[\frac{\rho(\boldsymbol{r}',\ t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]_{\text{adv}}\mathrm{d}^3r' \tag{5.4}$$

ここで$[\quad]_{\text{adv}}$はt'を**先進**(advanced)時間$t+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$で計算するという意味である。物理的には$(\boldsymbol{r},\ t)$での乱れは，位置$\boldsymbol{r}'$，時刻$t$より**未来**にある$t'$における源によるという状況に対応している。しかし(5.4)は(5.3)の時間反転ではなくて，源ρの時間反転も一緒に行なう時間反転である。第一の(遅延)解は上に引用した例で示される状況と正確に対応しているが，第二の(先進)解は自然の中に観測されるとは思えない。たとえば，無限遠からやってきて無線発信器に収束する電波に対応するものとなっている。

式(5.3)と(5.4)との相異は**境界条件**によるものである。(5.1)は双曲型2次偏微分方程式で，どんな解に対しても，それに次の斉次方程式(右辺はゼロ)の解を加えることによって，また別の解が得られる：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=0 \tag{5.5}$$

双曲型方程式の理論から(5.1)の一義的安定解を得るためには，境界条件として一つの時刻tでϕと$\partial\phi/\partial t$とを空間全体にわたって指定することが必要である[2]。一般的には，(5.5)の解を(5.3)か(5.4)に加えて，この種の任意の境界条件に合わせている。たとえば，解(5.3)に相当する境界条件は$t<0$に対し$\phi=\partial\phi/\partial t=0$であるのに，解(5.4)については$t>0$に対し$\rho=\partial\phi/\partial t=0$である。この二つの解の差$\phi_{\text{ret}}-\phi_{\text{adv}}$はしたがって斉次方程式(5.5)の解となっている。

こうした考えは微分方程式(5.1)を次のように積分表示に直すとわかりやすい[3]:

$$\phi(\boldsymbol{r},\ t)=\int_V\frac{[\rho]_{\text{ret}}}{R}\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi}\int_S\left\{[\phi]_{\text{ret}}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{\text{ret}}-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{\text{ret}}\right\}\mathrm{d}S \tag{5.6}$$

ここで便宜上$c=1$(これまで述べた単位系では電磁波に対してすでにそうであった)で$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$である。(5.6)の中の積分の意味は図5.2に示してある。Vはなめらかな閉曲面Sで囲まれたユークリッド空間の体積で，Sは外向きの法線$\boldsymbol{n}$をもっている。位置ベクトル$\boldsymbol{r}$はVの中の点を示す。$(\boldsymbol{r},\ t)$における場ϕへの寄与には次の三つの源がある：

(1)　Vの中の源；これらは最初の(体積)積分である。

(2)　Vの外の源。

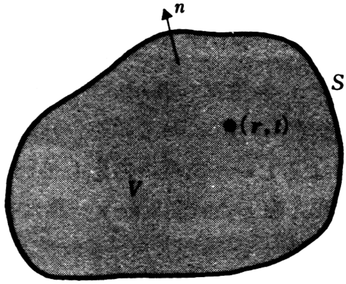


図 5.2 一般的な時定点を含む体積 V を包む面積 S (n は S の外向きの法線)

（3） 源とは関係のない無限遠からくる乱れ。

後の二つの寄与は2番目の(面積)積分の中に含まれている。V の中で最初の積分は非斉次方程式を満足し，2番目の積分は斉次方程式を満足する。

同じ場のもう一つの可能な積分表現は，(5.6)の $[\quad]_{\mathrm{ret}}$ を $[\quad]_{\mathrm{adv}}$ で置き換えた形で得られる。このような表式を簡約して(adv は advance の意味)

$$\phi=\int_V \mathrm{adv}+\int_S \mathrm{adv} \tag{5.7}$$

と表わすと，(5.6)のほうは次のようになる：

$$\phi=\int_V \mathrm{ret}+\int_S \mathrm{ret} \tag{5.8}$$

波動方程式の1次性のために，**遅延**と**先進**の任意の1次結合も解である：

$$k\int_V \mathrm{ret}+(1-k)\int_V \mathrm{adv}+k\int_S \mathrm{ret}+(1-k)\int_S \mathrm{adv} \tag{5.9}$$

$(k<1)$ であり，特別の場合として

$$\tfrac{1}{2}\int_V (\mathrm{ret}+\mathrm{adv})+\tfrac{1}{2}\int_S (\mathrm{ret}+\mathrm{adv}) \tag{5.10}$$

となる。

もし ϕ の源が V の内側の小さな領域にあるとするなら，そのときは面積積分への寄与は源に無縁な無限遠からの乱れのみとなる。(5.8)から通常の遅延解(5.3)を見出すには

$$\int_S \mathrm{ret}=0 \tag{5.11}$$

と置く必要がある。すなわち，遅延解の場合には源に関係のない輻射は消滅している。他方，先進形式(5.7)から(5.3)を見出すには，源に関係のない輻射を消すことはできなくて，もしそれを消すと，$\phi=\int_V \mathrm{adv}$ となってしまう。

実際には

$$\int_S \mathrm{adv} = \int_V \mathrm{ret} - \int_V \mathrm{adv} \tag{5.12}$$

であって，これは一般にはゼロではない[4]。

こうして，波動伝播の議論には，遅延形式も先進形式も等しく用いることができる。しかし，そのどちらをとるかによって異なる境界条件を用いて，問題の領域から遠い未来へ外向きに伝播する乱れはあるけれども，遠い過去から問題とする領域へやって来る源に無縁の輻射はないようにしなければならない。境界条件のこの選択がなぜ自然界でいつも行なわれているかを考えてゆこう。

5.2 有限系での波

あるエネルギーの波動の乱れを受けている閉じた有限な孤立媒質と，第2，3章で扱ったような孤立した気体の箱のボルツマンのモデルとの間には，密接な類似があるように思われる。その一例として，“池”を理想化したモデルを考えよう。池は不規則な形をしており，その縁は表面波を完全に反射するものと仮定する。縁における粘性とか摩擦とかの減衰効果はすべて無視する。なぜなら，これらの効果は熱力学的なものであって当面の非対称の問題には直接関係ないからである。また系は孤立していて，石が池の中心に投げ込まれる以前には表面は乱れを受けないということも仮定しよう。したがって，石の投入によって発散する円形波が中心から不規則な形の境界に向かって広がり，そこでの反射は極めて複雑なそして見かけ上はでたらめな形で起こるであろう。このような反射が二，三回起きた後は，いろいろな波模様の干渉によってさざ波が複雑に起伏しながら，“池”の表面は一応一様な形となるであろう。この波の干渉はボルツマンのモデル系における気体分子の衝突と似ている。そして簡単な対称的波模様(これは少数のパラメタで記述できる)からさざ波の複雑な分布(これを記述するには多量の情報が必要である)への展開は，気体の低エントロピーから高エントロピー状態への展開，特に閉じ込められた気体を真空中へ噴射したときの膨張と極めてよく似ている。

この類推をさらに進めて，遅延波の運動の非対称を第2，3章で述べたエントロピー変化のすじに沿って説明してみるのも面白い。すると，波の系はある意味では**エルゴード的**であるといえるかもしれない。すなわち，乱れの

全エネルギーに見合うどんな任意の表面模様も結局は任意の精度で実現されるということである。このような推測の証明には，二つの模様の“近さ”(closeness)をどのように定義するかが決定的なことになるであろう。もちろん，極めて対称的な条件でのエルゴード理論に現われる“例外的軌跡”との類似を避けるために，対称形の“池”を除くというようなことは必要であろう(たとえば，円い池の中心で乱れを起こすと円形波頭のみがつくられる)。

もしこのような“波のエルゴード”仮説が正しいなら，遅延伝播を**分枝系**によって解釈するのが自然であろう。完全に孤立した“池”では水の表面はほとんど常に一様な乱れ(confusion)の状態にあって，これは平衡状態に対応するものであろう。しかし極くまれには，大きな揺らぎが起こることがあり，ときにはそれが収束する円形波の形になるだろう。これは“先進波運動”と解釈され，それが気体の場合の極めてまれなエントロピー減少の揺らぎに対応するのであろう。この“先進波”は池の中心に達すると，そこを通り抜け，そして石の投入によるのと同じような遅延円形外向波となるだろう。これがポアンカレ型の回帰である。こうして，遅延波として解釈される運動ごとに，先進波として解釈される別の運動が同じ頻度で存在している。

しかし，実際の池は常に完全に孤立しているということはなくて，次の意味で一つの分枝系と考えられよう。池の表面は，石の投入以前には問題とする乱れを含んではいないだろう。［池があらかじめ乱れを含んでいたとしても，分枝系が全くでたらめにつくられる限り問題はない。つまり石をでたらめに投げ込めばよく，そのときに生じたさざ波が適当なときに結合して，全重畳波が収束波になるなどということは全くありそうもない。］このようにして遅延波の存在は，分枝系が非対称的な方法で形成されることによっている。この状況は，圧縮気体を大きな真空容器中へ膨張させるときの振る舞いと驚くほどによく似ている(図5.3を参照)。容器の壁に到達するまでは分子は広がる球面波となり，その後は反射分子その他の間の粒子間衝突によって，気体はすぐに一様で，無秩序な高エントロピー状態におさまる。量子力学では気体分子はドゥ・ブローイー波によって記述されることを思い起こせばこの類似はよりわかりやすいであろう。

3.4節で，現実の熱力学系は次の二つの理由のために孤立してはいないことを説明した：

（1） 分枝系はまず外界との相互作用によって形成される。

（2） 箱の壁を通して外界との残留的な連続結合が常に存在する。

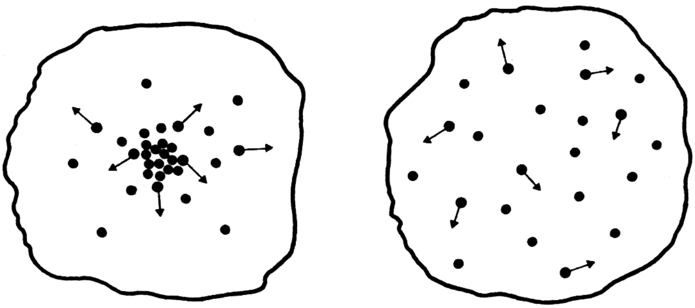


図 5.3 真空に向かっての気体の膨張〔(a)では気体分子は大きな容器の中心から放されて，発散する対称的な乱れの形で外に向かって流れる。その乱れが壁に到達した後には，(b)に示されるような不規則な配置になった高エントロピーにすぐに落着いてしまう。けれどもポアンカレの回帰定理によれば分子は結局は中心にもどるであろう。(a)と図 5.1 の表面波との類似は明らかである。〕

またそこに現われたエントロピー非対称は(1)を通じてすでに存在しており，(2)は系の微視的可逆性を破壊する効果はあるが，エントロピー非対称は(2)を必要としないということも注意深く説明した。ここの例でも系と外界との残留的な連続結合は存在するが，分枝系形成の非対称によってすでに説明ずみの遅延波にとって，これは付随的なことにすぎない。それにもかかわらず，この残留結合は不規則“雑音”をつくることによって系の可逆性を破壊し，初期条件を消し去る働きをする。実際には，この結合は摩擦および粘性の効果とか，風などのような偶然的な乱れの源の形をしている。これらの効果は波動方程式(5.1)に新しい項を付加することによって含めることもできようが，それらは熱力学的過程に由来するため，時間反転に対して対称ではない。物理的にはこの“雑音”は，すべての波頭の伝播方向を時間反転しても，系をその過去の歴史に沿って逆の順序に展開させる(完全孤立系の場合はそうであろう)ことにはならないという意味をもっている。それにもかかわらず，遅延波の存在は明らかに熱力学の考察とは無関係である。

最後に**相関**と**コヒーレンス**について注意しておこう。箱の中に閉じ込められている気体の場合に再びもどると，外界の不規則な影響による壁の粒子の無秩序な運動は分子間の相関を破壊し，細分割エントロピーの増大をもたらすことが思い起こされる。ある領域にいろいろな方向から近づく分子は，壁

面の異なる部分と不規則な衝突を行なっており，相関はなくなっているであろう。

空間の異なる方向からの影響に相関はないという仮説はペンローズ(Penrose)とパーシバル(Percival)[5]によって，**条件的独立性の法則**とよばれる一般則に形づくられた。その妥当性は，粒子地平の存在のため，異なる方向で遠く離れた領域には因果的な結合はないという事実による。この法則が波動伝播へどうかかわるかを次に述べよう。現実の池の波は，通常は池の縁での摩擦によって減衰する。その逆の過程，すなわち，池の壁での粒子の自発的運動が都合よく組み合わさって波を生じるというのは，不可能ではないにしても，熱力学的立場ではとてもありえそうもない。万一それがあるとしてなお，池の縁による自発的な波の生成が，収束する**コヒーレント**な円形波頭を生じることはありえそうもない。なぜならそれには，壁の異なる方向からくる影響の共同作業が必要となるからである。これは，熱力学的非可逆性は波の伝播の過程に伴っているけれども，なぜ先進波が生じないかということには熱力学とは無関係な別の理由があることを表わしている。この点はポッパー(Popper)[6]によって強調され，水の表面のコヒーレントな収束円形波をつくるには**中心からの構成**(organization from centre. たとえば，円いリングを水の表面に水平に落とすこと)が必要となるが，自発的にはほとんど不可能に近いということが指摘されている[7]。

ここでは水の表面波を例としたが，これは極めて一般的に**有限**系でのすべての波に適用できる。**無限**(すなわち，無境界)系に一般化するには問題がある。なぜなら，無限遠から源に無関係な波がくるかもしれないし，また，系の端が小波を反射して混沌状態をつくることができないからである。考察する気体が有限体積に閉じ込められていないときは，熱力学でも同じ問題が起きている。そのときはエルゴード定理や回帰定理などを適用することができない。これらの有効性は系の有限性によっているからである。熱い気体を無限空間(重力は無視)に開くと永久に広がってゆくであろう。これは時間非対称の過程ではあるが，エントロピー考察によって見出された非対称とは異なる性質のものである。収束する無限波や収束する気体などを除外する一つの方法は，条件的独立性の法則を事実として単に受け入れることである。しかし，多くの著者達は既知の物理法則に基づいてこの非対称を説明しようと試みている。

5.3 ミンコーフスキー空間での基礎電磁力学

乱れを無限遠まで伝播させるのに最も適した系は電磁場である。通常のマクスウェル－ローレンツ電磁力学は二つの力学系を扱っている。第一は電磁場であって，測定可能量は電場 $\boldsymbol{E}(x)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(x)$ である。相対論的には，これら二つのベクトルの6成分を反対称2階の電磁場強度テンソル $F^{\mu\nu}$ にまとめるのがふつうである：

$$F^{\mu\nu}(x)=\begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

非観測量である4元ポテンシャル $A^{\mu\nu}(x)$ を導入すると便利で，これを用いれば，$F^{\mu\nu}$ は次のように書ける（$_{,\mu}$ は $\partial/\partial x_\mu$ の略号である）：

$$F^{\mu\nu}=A^{\mu,\nu}-A^{\nu,\mu} \tag{5.14}$$

ポテンシャルの導入によって付加された自由度は，いわゆるローレンツ条件を課することで除かれる。

$$A^{\mu}_{,\mu}=0 \tag{5.15}$$

扱かう第二の力学系は，場の源として作用する荷電粒子の集合である。i 番目の粒子の質量を m_i，荷電を e_i としよう。時空の中でのその軌跡はパラメタ的に，式

$$x^{\mu}_{(i)}=z^{\mu}_{(i)}(\tau_i) \tag{5.16}$$

で与えられ，τ_i は i 番目の粒子の固有時間である。$\dot{z}^{\mu}_{(i)}$ はこの粒子の4元速度で，これを使って，点電荷に対する保存電流

$$j^{\mu}(x)=\sum_i e_i\int_{-\infty}^{\infty}\delta^4(x-z_i)\,\dot{z}^{\mu}_{(i)}\,\mathrm{d}\lambda_i \tag{5.17}$$

がつくられる。この電流から，電流保存の式

$$j^{\mu}_{,\mu}=0 \tag{5.18}$$

が導かれる。パラメタ変数に関する全微分である。(5.17)の積分では，粒子の世界線に沿って単調に増大する任意のパラメタを λ_i としている。この λ_i は，通常，計算の最後では τ_i と同じとされる。δ^4 はディラックの4次元デルタ関数で，$\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)\,\delta(x_4)$ である。これは $\dfrac{1}{4\pi}\delta(x^\mu x_\mu)$ にダランベルシャン(d'Alembertian) $\Box^2$ を演算して得られる[8]：

$$\Box^2\,\delta(x^\mu x_\mu)=4\pi\,\delta^4(x) \tag{5.19}$$

[この演算子は $\eta^{\mu\nu}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ とも書かれ，ラプラシアン ∇^2 をミンコーフスキー空間での4次元に拡張したものである。それはローレンツ共変スカラーである。]

物質－場の結合系の運動方程式は，形式的には相対論的変分原理から導かれる。全作用 $\mathcal{S}$ は3個の項の和として書かれる：

$$\mathcal{S}=-\sum_i m_i\int(\dot{z}^{\mu}_{(i)}\dot{z}_{(i)\mu})^{1/2}\mathrm{d}\lambda_i-\frac{1}{16\pi}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x-\sum_i e_i\int j^{\mu}A_{\mu}\,\mathrm{d}\lambda_i \tag{5.20}$$

第1項は全粒子の慣性の性質，第2項は電磁場の自由運動，そして第3項は二つの系の結合を表わしている。世界線 z は固定しておいて，A_μ を変化させての定常作用の原理 $\delta\mathcal{S}=0$ から，場の運動方程式(マクスウェル方程式)

$$\Box^2 A^{\mu}=4\pi j^{\mu} \tag{5.21}$$

が得られる。

同様に，A_μ を固定して z を変化させると，粒子の運動方程式が得られる：

$$m_i\ddot{z}^{\mu}_{(i)}=e_iF^{\mu}{}_{\nu}(z_i)\dot{z}^{\nu}_{(i)} \tag{5.22}$$

もし，(5.22)を3次元ベクトルで書くと

$$m_i\ddot{\boldsymbol{z}}_{(i)}=e_i(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_{(i)}\times\boldsymbol{B}) \tag{5.23}$$

と表わされ，$\boldsymbol{v}_{(i)}=\dot{\boldsymbol{z}}_{(i)}$ とすれば，なじみのローレンツの法則となる。

ダランベルシャルの構造から，共変式(5.21)は各成分 μ に対して，波動方程式(5.1)の形になっていることがわかる。通常 $c=1$ とするが，特殊相対論の基礎として光信号の伝播を用いたので，これは当然である。

場の乱れの源は荷電流ベクトル j_μ である。5.1節の議論はこの場合にも同じように適用できて，特に(5.3)の解に対応して

$$A_{\mu}(\boldsymbol{r},\,t)=\int\left[\frac{j_{\mu}(\boldsymbol{r}',\,t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]_{\mathrm{ret}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \tag{5.24}$$

となる。

任意に運動している単一荷電粒子という特殊な場合に，(5.24)の積分を実際に行なってみるとよい。(5.17)を(5.24)に代入し，ちょっとした計算[9]で積分できて

$$A_{\mu}(x)=\left[\frac{e\dot{z}_{\mu}}{(x^{\nu}-z^{\nu})\dot{z}_{\nu}}\right]_{\mathrm{ret}} \tag{5.25}$$

となる。ここで $[\kappa]_{\mathrm{ret}}$ は，括弧の中の量の遅延成分で，問題にしている点 x からの後方光円錐に沿って計算することを示す。3次元ベクトル記号では(5.25)の結果は

$$\phi(x)=\left[\frac{e}{\kappa R}\right]_{\rm ret} \qquad A(x)=\left[\frac{e\boldsymbol{v}}{\kappa R}\right]_{\rm ret} \tag{5.26}$$

ここで $\kappa=1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{n}=\hat{\boldsymbol{R}}$ であり, $\boldsymbol{R}$ は $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ である。4元ベクトル A_μ を $(\phi, \boldsymbol{A})$ として表わした。

式(5.26)の形はリエナール-ヴィーヒェルト(Liénard-Wiechert)のポテンシャルとして知られている。これらを微分して, 場 $\boldsymbol{E}$ と場 $\boldsymbol{B}$ が得られる。たとえば

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)=e\left[\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v})(1-v^2)}{\kappa^3R^2}\right]_{\rm ret}+e\left[\frac{\boldsymbol{n}}{\kappa^3R}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v})\times\dot{\boldsymbol{v}}\}\right]_{\rm ret} \tag{5.27}$$

こうして $\boldsymbol{E}$ は自然に二つの成分にわかれる。近接場とよばれる第一のものは近距離的 (R^{-2}) で, 粒子速度 $\boldsymbol{v}$ のみに依存する(それはときに速度場ともよばれる)。遠隔場とよばれる第二のものは遠距離的 (R^{-1}) で, 加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ の1次関数である。遠隔場は荷電粒子から"離れて"空間に輻射として流れ去るエネルギーと運動量を表わしている(遠隔場はときに輻射場ともよばれる)。非相対論的極限では遠隔場は

$$\left[\frac{e\hat{\boldsymbol{e}}\dot{v}}{R}\sin\Theta\right]_{\rm ret} \tag{5.28}$$

となり, Θ は $\boldsymbol{n}$ と $\dot{\boldsymbol{v}}$ との間の角度である。電気偏極単位ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}$ は, $\boldsymbol{n}$ と $\dot{\boldsymbol{v}}$ とでつくる平面上にあり, そして $\boldsymbol{n}$ に垂直である。すなわち輻射は横波である。$\hat{\boldsymbol{e}}$ が $\dot{\boldsymbol{v}}$ の向きにあるとき $\hat{\boldsymbol{e}}$ の向きを負とする。

ポインティング ベクトル $(4\pi^{-1})\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ を計算することによって, 遠隔場として空間に流れ去るエネルギーの割合が(5.27)から求められる。非相対論的極限では単位角あたりの出力は次のようになる:

$$\frac{e^2}{4\pi}\dot{v}^2\sin^2\Theta \tag{5.29}$$

電磁場輻射は, 荷電粒子を**加速する**ことによってのみつくられることに注意されたい。

もし粒子が電磁場の形でエネルギーを放射するなら, 粒子はそれと見合うだけの機械的エネルギーの減衰を受けねばならない。対応する減衰力の大きさは, 輻射出力(5.29)を, ある周期運動で減衰力 $\boldsymbol{f}_{\rm rad}$ によってなされる仕事に等しいと置くことによって, 容易に求められる。Θ の平均によって $8\pi/3$ の因子を生じ, 時刻 t_1 と t_2 の間の運動に対する減衰力による仕事の割合は

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{f}_{\rm rad}\cdot\boldsymbol{v}\,{\rm d}t=-\int_{t_1}^{t_2}\tfrac{2}{3}e^2\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\,{\rm d}t=\tfrac{2}{3}\int_{t_1}^{t_2}e^2\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\,{\rm d}t-\tfrac{2}{3}e^2(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v})\Big|_{t_2}^{t_1}$$

となる。第二の形は部分積分によるものである。その第2項は周期運動に対

しては消えてしまう：

$$\int_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{f}_{\rm rad}-\tfrac{2}{3}e^2\ddot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=0$$

これから減衰力として

$$\boldsymbol{f}_{\rm rad}=\tfrac{2}{3}e^2\ddot{\boldsymbol{v}} \tag{5.30}$$

である。

この減衰力は極めて奇妙な性質を示す。物理学で知られている他の力とは違って，速度の**2階微分**つまり加速度の変化の割合に依存していて，このことは極めて重要な意味をもつことが後にわかる。ここまでのところ，我々はある特定の分布の源によって生じた場のみを扱ってきた。しかし，ローレンツ力(5.22)で与えられるような，場から源へ及ぼす影響が含まれない限りは，その扱いは完全ではない。(5.22)では，場 $F_\nu{}^\mu$ の性質は特に定められてはいない。実際には，この場は i 番目の粒子に入射する場で，**その粒子自身の場を含む**全体場である。この理論で他に荷電や場がないのに荷電粒子によるエネルギー放射が可能なのは，この自己作用によるのである。

ディラック(Dirac)[10]は，自己作用を共変的に計算することによって，輻射反作用あるいは輻射減衰力 $\boldsymbol{f}_{\rm rad}$ を次のように導いた(簡略のために特に必要なもの以外はテンソル指標を省く)。まず，

$$F_{\rm tot}=F_{\rm ret}+F_{\rm in} \tag{5.31}$$

$$=F_{\rm adv}+F_{\rm out} \tag{5.32}$$

ここで全体場 $F_{\rm tot}$ は体積 V の外側からの“入射”場 $F_{\rm in}$ と V の内側の荷電からの遅延的寄与 $F_{\rm ret}$ に分けるか， それとも，外向場 $F_{\rm out}$ と源からの先進的寄与 $F_{\rm adv}$ に分けられる。ディラックは**輻射場** $F_{\rm rad}$ を

$$F_{\rm rad}=F_{\rm out}-F_{\rm in} \tag{5.33}$$

と定義し，これは(5.31)と(5.32)とから

$$F_{\rm rad}=F_{\rm ret}-F_{\rm adv} \tag{5.34}$$

と表わせる。それで $F_{\rm rad}$ は，荷電から遠く離れそして加速が起きてから長い時間の後には， 以前の定義(5.28)と一致する。 そこでは $F_{\rm adv}$ はゼロとなるからである。けれどもこの定義のほうが都合がよい。対応するポテンシャル $A_{\rm ret}-A_{\rm adv}$ は(5.33)の定義から，斉次方程式

$$\Box^2 A_\mu=0 \tag{5.35}$$

の一つの解である。(5.35)の解は，それが面 S 上でいつもゼロなら(図5.2参照)，それはどこでもゼロである〔これは(5.6)の $\rho=0$ として得られる〕。

したがって，粒子加速がないときは，未来光円錐の無限遠でだけではなく，どこでも $F_{\mathrm{rad}}=0$ である。

また別の場 $\bar{F}$ と $\bar{A}$ とを導入するのも便利である。その定義は

$$\bar{F}=\tfrac{1}{2}(F_{\mathrm{ret}}+F_{\mathrm{adv}}) \tag{5.36}$$

$$\bar{A}=\tfrac{1}{2}(A_{\mathrm{ret}}+A_{\mathrm{adv}}) \tag{5.37}$$

であって，それは時間対称的になっている。これらの場には源があり，非斉次方程式を満たしている。たとえば，

$$\Box^2\bar{A}^{\mu}=j^{\mu} \tag{5.38}$$

特定の境界条件を満たす解を得るためには，5.1節で注意したように，斉次方程式の解をいつでもこれらの場に加えることができる。たとえば

$$F_{\mathrm{ret}}=\bar{F}+\tfrac{1}{2}F_{\mathrm{rad}} \tag{5.39}$$

$$F_{\mathrm{adv}}=\bar{F}-\tfrac{1}{2}F_{\mathrm{rad}} \tag{5.40}$$

のように表わされるが，こうすると，場 F_{rad} と $\bar{F}$ の輻射減衰力に対する意味がよくわかる。(5.31)を次のように書き直す:

$$F_{\mathrm{tot}}=\bar{F}+\tfrac{1}{2}F_{\mathrm{rad}}+F_{\mathrm{in}} \tag{5.41}$$

ディラックは，図5.2の面 S が一つの荷電粒子を囲むときの F_{tot} の効果を計算した。(5.41)の最初の2項はこの粒子の自己場を表わすが，第3項は体積 V の外の世界のすべての粒子による入射波(そして無限の過去からのどんな輻射も)を表わしている。計算はかなり長いが，その結果によると，荷電 e をもつその源の粒子に働く $\bar{F}$ 場は，その粒子の静止エネルギーに e^2/a 程度の寄与を与える。ここで a は源の粒子の特性的な大きさである。この静止エネルギーは点電荷に対しては**発散する**。このような発散は，永年にわたって古典力学と量子力学の双方を困らせた。しかし現在では，繰り込みとよばれる形式的処方で発散を除去できる。これは観測量は常に二つの発散量の有限な差であるという事実に基づいている。したがって，無限大は単に引き去られ無視される。

F_{rad} はなんら発散問題を引き起こさない。それはどこでも有限であり，源となる粒子の世界線上においてさえも有限である。それは実際に粒子の自己力(self-force)を生じるもので，その力は共変式

$$f^{\mu}=\tfrac{2}{3}e^2(\dddot{z}^{\mu}+\ddot{z}^{\nu}\ddot{z}_{\nu}\dot{z}^{\mu}) \tag{5.42}$$

で記述される。非相対論的極限では，f^{μ} は f_{rad} となる。

最後に，(5.41)の F_{in} 項は，通常のローレンツ力 $\dot{z}^{\nu}F^{\mu}_{\mathrm{in}\,\nu}$ になる。したがって，(繰り込まれた)荷電粒子の運動方程式は

$$m\ddot{z}^{\mu}-\frac{2}{3}e^{2}\dddot{z}^{\mu}+\ddot{z}^{\nu}\ddot{z}_{\nu}\dot{z}^{\mu}=e\dot{z}^{\nu}F^{\mu}_{\mathrm{in}\ \nu} \tag{5.43}$$

である。

5.4 先駆加速

式(5.43)を非相対論的な形で書くと

$$m(\dot{\boldsymbol{v}}-\epsilon\ddot{\boldsymbol{v}})=\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}} \tag{5.44}$$

ここで $\epsilon=\dfrac{2}{3}\dfrac{e^2}{m}$ であり，粒子の緩和時間として知られている。それは通常は極めて小さく，電子に対しては約 10^{-23} 秒，我々の単位では 10^{-13} cm となる。$\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}$ とは，(5.43)の右辺の項による外力と，非電磁気的起源の他の力をも加えた全外力である。もし $\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}=0$ なら，(5.44)は次の**二つ**の解をもつ:

$$\dot{\boldsymbol{v}}=0 \tag{5.45}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{v}}(0)e^{t/\epsilon} \tag{5.46}$$

第二の解(5.46)は“逃走解”として知られるもので，すべての荷電粒子を不安定にさせるような際限ない自己加速を表わしていて，全く非物理的である。この奇妙な解の存在は，速度の2階微分に依存する減衰力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{rad}}$〔式(5.30)〕の性質によるものである。これを見るために，(5.44)の一般解を次の形に書こう:

$$\dot{\boldsymbol{v}}=e^{t/\epsilon}\left[\dot{\boldsymbol{v}}(0)-\frac{\epsilon^{-1}}{m}\int_0^t e^{-t'/\epsilon}\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(t')\,\mathrm{d}t'\right] \tag{5.47}$$

ここで(5.44)の特殊積分が相補関数(5.46)に加えられている。時間についての2階微分を含むふつうの力学問題では，一義的な解を得るためには，ある瞬間での粒子の位置と速度とを指定すれば充分である。現在の場合の(5.44)は時間についての3階微分なので，軌跡を一義的に定めるには初期加速も指定する必要がある。

さて，任意の初期加速 $\dot{\boldsymbol{v}}(0)$ では(5.47)は逃走解になるであろうが，しかしディラック(Dirac)[10]は，初期加速を任意ではなく特殊な値に固定することによって，逃走解を避けることを提案した。(5.47)をながめると，もし

$$\dot{\boldsymbol{v}}(0)=\frac{1}{m}\int_0^{\infty} e^{-t'/\epsilon}\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{5.48}$$

のように選ぶと，そのとき $t\to\infty$ で $\boldsymbol{v}$ は有限にとどまることがわかる。$\dot{\boldsymbol{v}}(0)$ を(5.48)とすると，(5.47)は書き直されて，次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{m}\int_0^{\infty} e^{-s}\boldsymbol{f}_{\mathrm{ext}}(t+\epsilon s)\,\mathrm{d}s \tag{5.49}$$

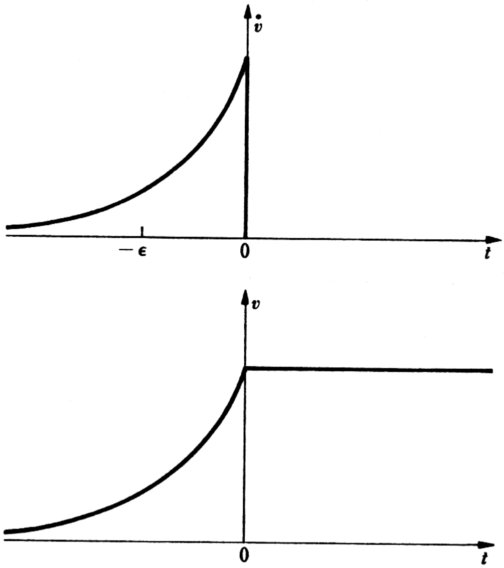


図 5.4 インパルスからの先駆加速（荷電粒子は $t=0$ で鋭い一撃を受けるが，暴走しないためにはこの瞬間より前に加速されていなければならない。）

粒子はいまや運動の微積分方程式に従うので，任意の時刻 t でのその振る舞いは，t より後(later)の時刻に粒子に働く外力に依存する。特に，初期加速(5.48)は $t=0$ での瞬間力には依存せず，粒子の未来運動の全体にわたっての重みをつけた平均に依存する。たとえば，$t=0$ で物体は1次元のデルタ関数力を受けるとしよう。(5.49)で $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}=K\delta(t)$ とおくと

$$\dot{v}(t)=\begin{cases}\dfrac{K}{m}e^{t/\epsilon} & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases} \tag{5.50}$$

となる。すると，粒子は力が及ぼされるよりも以前に加速されていることになる(図5.4参照)。この現象は**先駆加速**(preacceleration)とよばれ，これは我々の通常の“因果律”を破るように見える。しかし，このような非因果的振る舞いの特性的時間尺度は ϵ であり，それはあまりにも小さくて実際には観測されない。これは光が素粒子の“古典半径”を通過するのに要する時間程度であり，そこでは量子的効果のほうがそれよりもずっと重要になっていて，揺らぎなどの問題が起こってくる。

それにしても〔もし(5.44)をまともに受け入れると〕，何か納得できない感じが残る。好ましからぬ非因果的振る舞いを導入して逃走解を消すことはできるが，こんどはその非因果性を，自然界がたまたまもっている定数値(e と m)のおかげで無視しようとしている。自然界は因果律を保存するような定数値を選ぶようにできているということを，将来示すことができない限り，この説明は完全には納得できない。

5.5 輻射に対する境界条件

5.3節で，電荷の遅延場 $F_{\rm ret}$ が自分自身に働くときは，$F_{\rm ret}$ は都合よく二つの部分――源に無関係な $\frac{1}{2}(F_{\rm ret}-F_{\rm adv})=\frac{1}{2}F_{\rm rad}$ と粒子上に源のある $\frac{1}{2}(F_{\rm ret}+F_{\rm adv})=\bar{F}$ と――にわけられて，前者は観測可能で有限な輻射減衰力を与え，後者は粒子の自己エネルギー(質量 m)と識別できないものになることを示した。しかし $F_{\rm in}$ については何もふれてなかった。

面 S によって囲まれる体積 V の中の荷電粒子の集団を考えよう。他のところには何もないとする。粒子 i に働く力全体は，場

$$\sum_{j\neq i}F_{(j)\rm ret}+\tfrac{1}{2}(F_{(i)\rm ret}-F_{(i)\rm adv})+F_{\rm in} \tag{5.51}$$

によるものであるが，ここで体積 V の外側に荷電粒子はないと仮定されているので，$F_{\rm in}$ は無限遠からくる，源に無関係の場のみを含んでいる。

しかし，ほかの可能性もある。(5.51)を導くにあたってはどこにも境界条件を用いなかったので，理論は時間についての基本的対称性を保存していて，マクスウェル-ローレンツ式と矛盾しないはずである。まさにそのとおりで，(5.32)の形から出発してもよかったわけで，その場合は(5.51)の代わりに次の表現が得られるであろう：

$$\sum_{j\neq i}F_{(j)\rm adv}-\tfrac{1}{2}(F_{(i)\rm ret}-F_{(i)\rm adv})+F_{\rm out} \tag{5.52}$$

さらに(5.51)と(5.52)の平均をとって，時間対称的な形を得ることもできよう。

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j\neq i}(F_{(j)\rm ret}+F_{(j)\rm adv})+\tfrac{1}{2}(F_{\rm in}+F_{\rm out}) \tag{5.53}$$

もし現実世界で経験される通常の遅延場のみを得ようと思うなら，系に対して境界条件

$$F_{\rm in}=0 \tag{5.54}$$

をつけることが必要であり，これがゾンマフェルトの輻射条件として知られているものである。(5.51)を見ると，粒子 i に作用する場は，他の粒子のみ

による**遅延場**と，それに**自己場**(有限部分)を加えたものであることがわかる。さらに(5.53)と(5.34)から，全外向き場は

$$F_{\text{out}}=\sum_{\text{全}\,j}(F_{(j)\text{ret}}-F_{(j)\text{adv}})$$

となり，(5.53)は(5.51)に帰着し，時間対称は破れてしまう。

もちろん，$F_{\text{out}}=0$ の条件をつけると，荷電粒子に収束して“反減衰”力で粒子を加速する輻射とともに，他の粒子からの先進場の記述が得られる。この反減衰力はふつうの減衰力と反対の符号をもつ。

ミンコーフスキー空間の中で永久的に荷電粒子が局在していて，他のところには何もない場合には，荷電や空間の性質からは時間非対称が生じないので，F_{in} と F_{out} を識別する方法はないだろう。このような世界では意味のある境界条件は

$$F_{\text{in}}=F_{\text{out}}=0 \tag{5.55}$$

だけであって，このとき荷電粒子 i に作用する場は(5.53)から

$$\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}(F_{(j)\text{ret}}+F_{(j)\text{adv}}) \tag{5.56}$$

となる。

5.6 宇 宙 論 (つづき)

ミンコーフスキー空間に永久に局在化されている荷電粒子分布などは，現実世界にはありえない。物質はリーマン空間にわたって分布していると思われるし，そして時空多様体は非対称の性質をもっているようである。たとえば，永久に膨張をつづけている ($\dot{R}/R>0$) とか，時間の一方向にのみ特異性をもつとか，ある種の地平をもつとかなどである。空間の性質に加えて，粒子自身も熱力学(あるいは K 中間子)を通じて時間非対称性をもっているようである。これらすべての性質は，電磁力学での境界条件の選択と関係があるのだろう。

フリードマンのモデルでは，後向き光円錐は無限の過去にまで延びることができず特異点と交差しているから，$F_{\text{in}}=0$ と置くことはおそらく妥当であろう。この特異性の領域では物質と輻射は強く結合し，その物質密度は無限大になっている。こんな状況では源に無関係な漸近場という考えは通用するとは思われない。[もっと複雑なことには，特異点が近づくにつれて，空間的表面 S は空間的状態(space-like)にとどまってはいないだろう!!]

ある種の宇宙モデルにおいてゾンマフェルトの輻射条件(5.54)を仮定して

もよい別の可能性はシャーマ (Sciama)[4] によって示唆された。これは F_{in} がゼロでなければ，それは無限大になるだろうというものであった。オルバースのパラドックスと同じような理由によって(4.5節を参照)，すべての"未来"の光源からの輻射の集積効果は発散するであろうからである。入力輻射のエネルギー密度は(4.20)を未来にわたって積分すれば直ちに得られる：

$$\varepsilon_\gamma(t)=R^{-4}(t)\int_t^\infty L(\tau)\rho(\tau)R^4(\tau)\,d\tau \tag{5.57}$$

[これを(4.21)と比較されたい。] 光源の数は保存されると仮定すると，どんな t に対しても

$$\int_t^\infty L(\tau)R(\tau)\,d\tau\to\infty$$

ならば，$\varepsilon_\gamma(t)$ は発散することになる。上の条件は $L(t)$ が

$$L(t)\propto[R(t)t]^{-1} \tag{5.58}$$

よりもゆっくりと落ちてゆくことを要求している。たとえば，アインシュタイン－ドゥ・シッター宇宙は $R(t)\propto t^{2/3}$ なので，光源が $t^{-5/3}$ よりゆっくりと冷えるならエネルギー密度は無限大となる。

実際はそのように簡単なことではない。もしエントロピー増加の時間方向が R の増大の方向であるとするならば，そのときはこの輻射の吸収，特に初期の火の玉の中での吸収が起こることを認めなければならない。[もしそうでないなら，収縮宇宙の中での遅延輻射を論じることになるだろう。] この吸収は，たとえば粒子対生成によって起こるが，その粒子対も結局はふたたび消滅し，そのときに電磁波を輻射する。この過程に付随する F_{in} 場もあるだろうし，そしてこの F_{in} 場がこんどはさらに粒子対をつくる，といったように続いてゆくであろう。実際，このような連鎖から除かれるべき唯一のエネルギーは，宇宙膨張によって失われるエネルギーである。それで，エントロピー増加と先進輻射の過程が共存しているときは，いつもエネルギー無限大の不安定性が入り込むように思われる。

この節に用いられた理由づけみたいなものに興味を示す人はあまりないようである。電磁力学を学ぶ学生のほとんどは，境界条件(5.54)をむしろ一つの事実として受け入れて，宇宙論的問題を無視するであろう。しかし，F_{in} の消滅が系の時間対称と矛盾せず常に正当化される場合が一つある。それは F_{out} もまた消滅する，すなわち(5.55)の境界条件も成立するときである。この可能性を調べてみよう。

5.7 輻射の吸収体理論

ミンコーフスキー空間に荷電粒子群が永久に局在していて他には何もないという簡単な場合に話をもどそう。(5.53)をながめると，次の境界条件

$$F_{\mathrm{in}}+F_{\mathrm{out}}=0 \tag{5.59}$$

を選べば，電磁場の全体的対称性は保たれることがわかる。こうすると，すべての荷電粒子は遅延場と先進場とを対称的につくりだすことになる。i 番目の粒子に作用する場の全体は，(5.56)によって与えられる。境界条件(5.59)をもつ系は，通常のゾンマフェルトの輻射条件をもつ系とは随分異なる振る舞いをするであろう。しかし，(5.59)を用いるのと(5.54)を用いるのとが同じ結果になる場合がある。それはとにかく $F_{\mathrm{out}}=0$ の場合で，そのとき(5.59)は(5.50)を意味することになる。このような状況は，すべての荷電粒子が**断熱容器**の中に閉じ込められている場合なら起こるだろう。3.1 節で，中味が外界から孤立しているこのような容器は，熱力学的立場からは時間における非対称をもちえないことを論じた。この事実はまた，電磁気的非対称と熱力学的非対称との間の密接な関連を強調している。もちろん，このような容器が熱力学的平衡の状態にあるならば，すべての輻射過程はその反対の過程と正確につり合っているわけで，その場合は遅延輻射と先進輻射という概念を実際には適用できない。平衡からのどんな揺らぎでも，先進と遅延両方の輻射をつくりだすことになる。

この意味は，量子電磁力学によって理解できる。完全反射の箱の中の励起原子という，あいまいさのない問題を考えよう。ある時間の後には，原子は基底状態にあって光子が放出されているという，ある確率がある。しかし，光子は箱によって有限体積の中に閉じ込められているので，それが再吸収されるという時間あたりの確率は，小さいけれども有限である。ここでは先進ポテンシャルか遅延ポテンシャルかということは問題にならない。もちろん，最初の過程(放出)を遅延輻射の生成とし，第二の過程(再吸収)を遅延輻射の除去というように見なしたいと思うであろうが，量子論によって与えられる輻射の粒子性を用いると，基本的な時間対称性がはっきりしている。このことは量子系に対するポアンカレ周期(6.2 節を見よ)に対応している。量子的記述から古典的記述に移るためには，コヒーレントな波の形で光子雲を放出する極めて多数の原子を考える必要がある。そのとき回帰時間は極めて長いであろう。けれども，結局は収束するコヒーレントな波が生じることは確かである。このことは，5.2 節での“池”の問題から見てたいして驚くこ

とでもない。それは，ここでも**有限系**を扱っているからである。もし箱が開かれているなら光子は逃げ出し，(空間が他のところは何もないなら)決して帰ってこないであろう。それはちょうど，フラスコの栓を抜くと中の気体分子が周囲の空間に永久に散逸してゆくようなものである。

無限系は，もしそれが電磁波に対して**完全吸収的**とか不透明であるならば，やはり境界のある断熱容器のように振る舞うことになる。つまり，光のもれない箱として振る舞うような大きな体積が見出されるならば，ということである。荷電粒子が，他はからっぽのミンコーフスキー空間に局所的分布をもつという理想化された場合には，このことは，その外層部の吸収性が極めて強いので，中心付近の粒子から放出された輻射は系外のからっぽの空間領域に浸透できないことを意味する。これが $F_{\text{out}}=0$ ということで，したがって(5.59)の境界条件によって，また $F_{\text{in}}=0$ でもある。(5.51), (5.52)と(5.53)とをながめると，このような不透明な分布の中心付近の粒子に作用する場全体の表現として，次の3とおりがすべて等価であることがわかる。

$$\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}(F_{(j)\text{ret}}+F_{(j)\text{adv}}) \tag{5.60}$$

$$\sum_{j\neq i}F_{(j)\text{ret}}+\frac{1}{2}(F_{(i)\text{ret}}-F_{(i)\text{adv}}) \tag{5.61}$$

$$\sum_{j\neq i}F_{(j)\text{adv}}-\frac{1}{2}(F_{(i)\text{ret}}-F_{(i)\text{adv}}) \tag{5.62}$$

簡単な吸収体モデルに対して，これらの表現がどうして等しいかを詳しく見ると面白い。ここで扱うモデルは，ホィーラー(Wheeler)とファインマン(Feynman)[12]による時間対称的電磁力学の理論によるものである。荷電 e の粒子 i が球空洞の中心にあり，その空洞の内半径 R_{int} は充分に大きくて内壁は粒子 i の輻射領域にあると考えよう。壁は指標 j で標示される自由荷電粒子(j)からできているとする。これら粒子密度は ρ で，個々の粒子の荷電は e で質量は m である。空洞壁の厚さは指定しないが，その外半径 R_{ext} は充分に大きくて，壁は不透明になっているとする。

まず，(5.60)の形の場を考えよう。各粒子は加速されると $\frac{1}{2}$ 遅延$+\frac{1}{2}$ 先進の遠隔場を生じる。粒子 i は短い時間非相対論的加速を受けると仮定しよう。それは過去と未来に向かって対称的に電磁波を放射し，そしてこれらの波は空洞壁にあたり，そこで他の荷電粒子を動かすことになる。その運動がこんどは時間対称の場を壁からつくりだす。過去と未来の運動の間には確かに複雑な相互作用がからむので，応答する運動を因果的にたどりながら，粒

子 i の任意の運動による結果をつきとめるなどということはできない。ただ荷電の全集団に対する自己整合的な解を見出す試みができるだけである。特に，各粒子がうまく場をつくりだして，すべての粒子からの場の重ね合わせが，ちょうど完全な遅延形式(5.61)または完全な先進形式(5.62)を用いることになっていることもあるだろう。

そこで，次のように推論をたどってみよう。粒子 i が運動状態におかれ，それによって最終的に完全遅延場がつくられるとする。この場は空洞内を伝わって空洞の内壁に到達し，そして内壁に侵入しはじめる。壁粒子はこの場によって運動状態におかれ，その運動は $\frac{1}{2}$ 先進 $+\frac{1}{2}$ 遅延 の場をつくるであろう。代表的な粒子 j に着目しよう。遅延成分は壁の中へふつうに伝わるが，先進成分は空洞から j の上に収束してくる球面波頭として図式的に理解できよう (図 5.5)。空洞は極めて大きいので，この先進波は図の左から来るほとんど平面波に近い形となり，粒子 i の加速の瞬間に i を通過し，そして j が i からの遅延波によって運動状態におかれるその瞬間に，最終的に j に収束する。

粒子 j からの先進“応答”波は，i からの遅延波が存在する i と j との間の空間を通るので，これら二つの波の干渉が起こるはずである。ホィーラーとファインマンは，この干渉は建設的であり，それによって i からの $\frac{1}{2}$ 遅延波

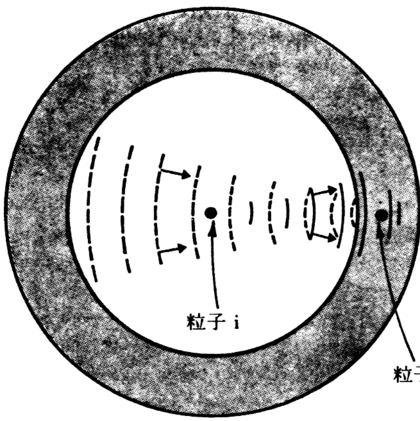


図 5.5 不透明な箱の中心の粒子 i が加速されて，粒子 j の方向に遅延波(実線)を放出し，j はその結果として運動状態に置かれる。j のこの運動による先進波は空洞を左から横切り(破線)，i が加速されるその瞬間に中心を通過する。それから i の遅延波を伴って，j が動かされるその瞬間に j に最終的に収束する。

が，まさに当初仮定した完全遅延波にまで高められることを示した。この他にも，図5.5のｉの左側での干渉もあるだろうが，これはｉからの先進波との干渉となる。この干渉は破壊的であって，ｉからの$\frac{1}{2}$先進波をちょうど消してしまう。得られた解はこうして自己整合的である；当初のｉからの完全遅延波は，実際には（ｉからの$\frac{1}{2}$遅延）+（ｊからの$\frac{1}{2}$先進）であることがわかる。

干渉の様子は，一見いささか謎めいているようである。ｉの領域ではｊの先進波はほとんど平面波であるのに，ｉの先進場は球面波で，空洞の中心に向かって収束する。さらに，遠いｊの先進応答は，この領域ではｉの場よりずっと弱いことであろう。しかし，これは壁粒子の一つであるｊの運動についてだけである。上での推論はｉとｊとの距離には依存しないので，ｊの前後の粒子も同様に応答し，そしてそれらの先進波はｉの近くで重なり合うだろう。同じ推論は中心からすべての方向の壁粒子に適用できて，全体としての効果は，非常にたくさんの平面波が少しづつ異なる方向に動いているものの重ね合わせとなろう。これは空洞中心に向かう球面波頭として現われ（図5.6)，ｉを通過し，そして再び壁に向かって広がってゆく。こうしてｉの最初の波も，空洞壁の**結合した**応答場もともに球面波の形となり，その相互干渉のための要求を満たしている。

次に，空洞壁の応答場はちょうど都合のよい振幅と位相をもっていて，ｉ

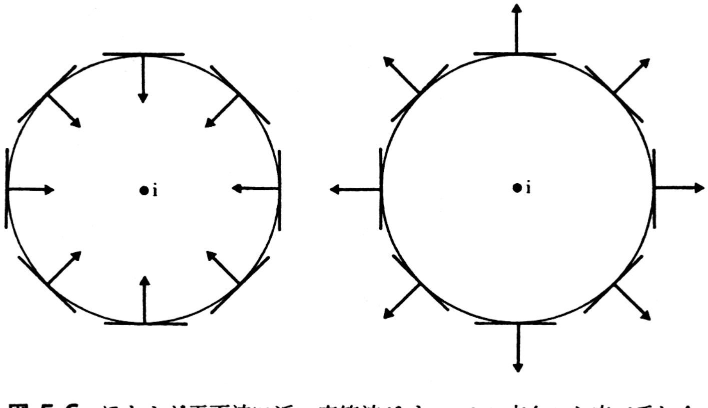


図 5.6 ほとんど平面波に近い応答波がすべての方向から来て重ね合わせられると，中心のｉに収束する球面波頭のようになり，それを過ぎて，発散球面波として出てゆく。全応答波の形はしたがってｉからの波と同じであり，両者は干渉し合う。

の $\frac{1}{2}$ 先進 $+\frac{1}{2}$ 遅延 の場と結合し，当初仮定した完全遅延場をつくりうることを示そう。ホィーラー(Wheeler)とファインマン(Feynman)による証明[12]の概略は以下のようである。

粒子 i が非電磁気的に動かされて，次のような非相対論的加速を得たとしよう

$$\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{U}_0 e^{-i\omega t} \tag{5.63}$$

理論は線形なので，もっと一般的な加速は異なる振動数 ω のフーリエ重ね合わせとしてつくられる。$\boldsymbol{U}_0$ は一定振幅のベクトルである。この加速によって j の場所につくられる遠隔場の電気成分は，(5.28)から

$$e\hat{\boldsymbol{e}}R^{-1}\sin\Theta\, U_0\, e^{-i\omega(t-R)}$$

である。ここで R は粒子間距離である。この電場による j の加速は

$$e^2(mR)^{-1}\hat{\boldsymbol{e}}\sin\Theta\, U_0\, e^{-i\omega(t-R)} \tag{5.64}$$

となる。j のこの加速によって空洞中心に生じる $\frac{1}{2}$ 先進場を求めたい。(5.28)の表現をもう一度使うが，$[\ \ ]_{\text{ret}}$ を $[\ \ ]_{\text{adv}}$ で置き換える〔けれども(5.28)の後に与えたベクトル方向に関する注意はやはり生かす〕。まず，j の加速は $\hat{\boldsymbol{e}}$ 方向で，そして i から j への半径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直であることに注意しよう(図 5.7)。そこでこれに伴う遠隔電場は $\hat{\boldsymbol{e}}$ に反平行となる(伝播の遅れは認める)。空洞中心では，したがってこの場は $\boldsymbol{U}_0$ と $\boldsymbol{n}$ の面上にあり，$\boldsymbol{U}_0$ の**正方向**に成分をもっている。この成分の大きさは

$$\tfrac{1}{2}e^3(mR^2)^{-1}\sin^2\Theta\, U_0\, e^{-i\omega t} \tag{5.65}$$

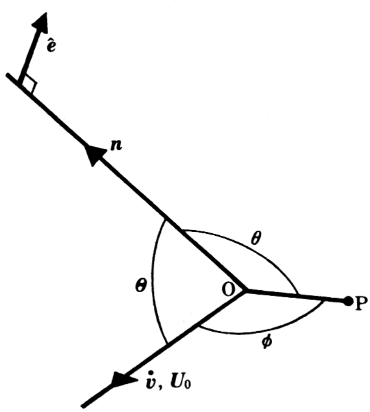


図 5.7 吸収体理論の計算に用いられた種々の角度とベクトル

である。(5.65)で与えられる場には次の二つの重要な性質がある：

（1） R^{-2} に依存している。

（2） ベキの中に遅延因子がなく，場は i の運動と同時に作用する。

この応答場を中心のまわりの領域でも計算するのは簡単で，(5.65)に適当な位相因子をつけ加えればよい(振幅については案じるに及ばない。j からの波はほとんど平面波なので，中心領域を通じてわずかに変化するだけである)。図5.7に，計算に用いる種々のベクトルや角度を記しておいた。$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{U}_0$ はすべて同じ面上にあるが，一般的な点Pでの場を計算するときの $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ はそうではない。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{U}_0$ とからの角度は θ と ϕ と記してある。Pでの場を計算するための適当な位相因子は，$\overline{\mathrm{OP}}\equiv r$ として，$\exp(i\omega r\cos\Theta)$ であることは直ちにわかるであろう。

実際には壁物質中に存在する分散効果を考慮するとき，別の位相因子が必要である。この物質の屈折率を n とすると，粒子 i からの最初の遅延波が壁物質を通して j に到達するのに $R-R_{\mathrm{int}}$ の深さだけ透過すると，$-\omega(n-1)\times(R-R_{\mathrm{int}})$ の位相の遅れが生じる。

点Pで $\boldsymbol{U}_0$ に平行な，**全体の** $\frac{1}{2}$ 先進電場の成分を計算するには，(5.65)に粒子密度 ρ と素体積 $R^2\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\Omega$ を掛けて，空洞壁体積にわたって積分しなければならない。位相因子も考慮してこの積分は

$$\frac{1}{2}eU_0e^{-i\omega t}\int e^{i\omega r\cos\Theta}\sin^2\Theta\,\mathrm{d}\Omega\int_{R_{\mathrm{int}}}^{R_{\mathrm{ext}}}\rho e^2m^{-1}e^{-i\omega(n-1)(R-R_{\mathrm{int}})}\mathrm{d}R \quad (5.66)$$

$\boldsymbol{U}_0$ に垂直な全成分は対称性によって消える。径積分をまず行なう，空洞壁の重要な吸収性質についてはまだ何もいっていないが，これは n を複素量とすることによって考慮できよう。

$$n=n_0-ik \quad (5.67)$$

ここで小さな虚数部は，まだ特定していない吸収機構を表わしている。k は小さいとはいっても，壁は充分に厚くて完全に不透明になっていると仮定する。そうすると，積分の上限としての R_{ext} を安心して∞に置き換えられる。この積分はただちに遂行できて

$$\rho e^2m^{-1}[-i\omega(n-1)]^{-1} \quad (5.68)$$

となる。ここで，自由荷電粒子の薄いプラズマの屈折率としてよく知られた公式(5.9節を見よ)

$$n=1-\frac{2\pi\rho e^2}{m\omega^2} \quad (5.69)$$

を用いると，(5.68)は簡単化されて，$i\omega/2\pi$ に帰着する。

式(5.66)の角積分は標準的な幾何学的方法で可能である。その値は

$$\frac{8\pi}{3}\left\{\frac{\sin\omega r}{\omega r}+\left(\frac{3}{2}\sin^2\phi-1\right)\left[\frac{\sin\omega r}{\omega r}-\frac{3\sin\omega r}{\omega^3r^3}+\frac{3\cos\omega r}{\omega^2r^2}\right]\right\} \quad (5.70)$$

もしPとOの距離が波長に比べて充分遠いなら(しかし，なお $r\ll R_{\rm int}$)，(5.70)の最後の2項は無視できて，次のようになる：

$$\frac{4\pi\sin\omega r}{\omega r}\sin^2\phi \qquad (\omega r\gg 1) \quad (5.71)$$

点Pにおける $\frac{1}{2}$ 先進応答場の最終的形は，(5.65)から

$$-\frac{eU_0}{2r}\sin^2\phi\,\{e^{i\omega(r-t)}-e^{-i\omega(r+t)}\} \quad (5.72)$$

となる。これが望みの結果であることを確かめるには，U_0 に平行な遅延遠隔電場の成分は(5.28)から負となり，そしてそれは

$$\left[-\frac{e\dot{v}\sin^2\Theta}{r}\right]_{\rm ret} \quad (5.73)$$

に等しく，いまの場合には

$$-\frac{eU_0\sin^2\Theta}{r}e^{i\omega(r-t)} \quad (5.74)$$

になることを思い起こせばよい。対応する先進場は

$$-\frac{eU_0\sin^2\Theta}{r}e^{-i\omega(r+t)} \quad (5.75)$$

である。図5.7をながめてわかるように，U_0 に対する場の軸対称のために，場の強さに関する限りは Θ と ϕ は同じものである。その結果(5.72)は

(iの $\frac{1}{2}$ 遅延場)－(iの $\frac{1}{2}$ 先進場)

の値となる。

粒子iの位置での先進応答場を計算するのも面白い。この場合には(5.70)に対して反対の極限をとらねばならない，すなわち $\omega r\ll 1$ とする。この極限では角括弧の中の項を無視できるので，角度因子として $8\pi/3$ が得られる。これを(5.66)に用いると，U_0 方向の電場の成分として

$$\tfrac{2}{3}eU_0(-i\omega)e^{-i\omega t}=\tfrac{2}{3}e\ddot{v} \quad (5.76)$$

となる。さて，この電場はそれが進むにつれて粒子iと相互作用をするが，$\dot{\boldsymbol{v}}$ 方向のその力は $\frac{2}{3}e^2\ddot{v}$ で，これはまさに(5.30)で与えられた通常の輻射減衰力 $\boldsymbol{f}_{\rm rad}$ である。

以上の注目すべき結果をまとめよう。(5.60)で与えられる時間対称場をとり，そして輻射減衰項なしで出発したが，モデルとしてとりあげた不透明容

器からの集合場を重ね合わせると，その結果は，通常の輻射減衰項を備えた完全遅延場(5.61)を用いるのと結局同じになることを示した。こうなるのは，空洞壁の先進応答場が，輻射を行なう粒子の時間対称場を完全遅延場に変え，そして同時に，この粒子と相互作用して必要な輻射減衰力をつくりだすからである。

これらの結果が，空洞壁の正確な構造には無関係なのは不思議に思われようが，その決定的な理由は，径積分中での$(n-1)$と$\rho e^2/m$との間に起こる相殺効果である。この相殺は偶然のことではない。もし吸収体としてもっと凝ったモデル(量子的扱いを含む[13])を採用しても，このことは起こる。なぜなら，屈折率は媒質粒子の応答によって定まるものなので，屈折率の中に，jによる輻射場に現われるのと同じ因子が常に現われるからで，そんなに驚くことではあるまい。そのオリジナルな論文の中でホィーラー(Wheeler)とファインマン(Feynman)は[12]，空洞内壁からの反射効果と，隣接する吸収粒子間の相互作用をも含めて，相対論的な減衰力(5.42)をも見出している。

5.8 遠隔作用電磁力学

前節の議論は，それ自身として興味深いものではあるが，場に対しては(5.59)が正しい境界条件であるという仮定にやはり基づいている。もしもこの任意性が除かれ，場の時間対称性が，前提されるのではなく導かれる形で，電磁力学の理論が展開されるなら，それはずっと望ましいことである。これを遂行する明瞭な方法の一つは，電磁場を**すべて**取り払ってしまうことである。そのとき，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{in}}$とか$\boldsymbol{F}_{\mathrm{out}}$のような斉次方程式のすべての解は，必然的にゼロになってしまうからである。このような理論はいずれにしても，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{in}}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{out}}=0$であるような断熱容器内のマクスウェル電磁力学の結果を導くであろう。実際のところ，場という独立な機械的自由度を除きたいのには，別の理由もある。5.3節に述べた自己エネルギーの発散は，粒子とそれ自身の電磁場との相互作用から起こるもので，その場を除けば，それに伴う発散もなくなるのである。

場のない電磁力学を論じる前に，物理における場の概念の由来をまず理解しておくのがよい。ニュートン力学では，相互作用下にある位置$\boldsymbol{r}_i$，質量m_iの点粒子の系は，次のラグランジュアンによって特徴づけられる：

$$L=\sum_i \tfrac{1}{2}m_i\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right)^2-V(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|) \qquad (5.77)$$

V は，任意の 2 体ポテンシャルで粒子間の距離のみの関数ある。オイラー－ラグラジュの方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}=0 \tag{5.78}$$

で，(5.77)の L に対しては，各粒子 i の運動について次の 2 階微分方程式

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial V}{\partial r_{ij}}\hat{\boldsymbol{r}}_{ij} \tag{5.79}$$

が得られる。ここで $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$ である。

この簡潔な記述は，主として絶対同時面(1.2 節)が存在することによるもので，(5.77)から(5.79)に用いた変数 t を，すべての粒子 i に対して同じに選ぶことができた。作用と反作用はニュートン力学では同時であり，時間の原点移動に対して L が不変ということは，エネルギーの保存を意味している。(5.79)は，ある瞬間での $\boldsymbol{r}_i$ と $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ とを指定すれば，積分して一義的な解が得られる。

しかしこの素朴な取り扱いも，相対論的力学では，次の三つの理由によって破れてしまう：

（1） 粒子間ポテンシャル $V(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)$ はローレンツ不変ではない。

（2） 共通な粒子時間 t は存在しない。

（3） 粒子間の影響は有限速度で伝播する。すなわち作用と反作用とは同時ではない。

これらの困難に加えて，初期値問題は次の理由によって相対論的に表現できるとは思われない。図 5.8 に，二つの世界線と光円錐とが描いてある。世界

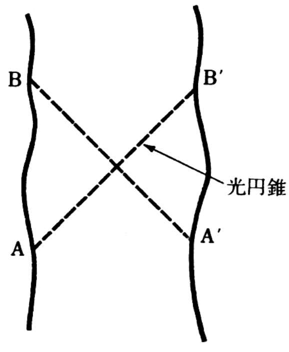


図 5.8 世界線の一部 AB と A′B′ とは空間的距離に離れており，独立に指定できる。

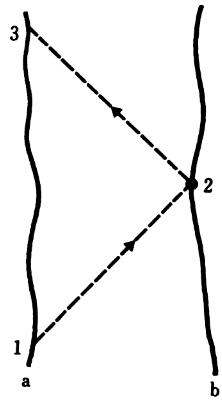


図 5.9 二つの粒子 a と b との遅延作用

線の部分 AB と A′B′ との間では，直接に影響し合うことは不可能で，独立に指定してもよいのである。ある時間における各粒子の位置と速度とを指定するだけでは，系の力学的運動を決めるのには不充分で，AB, A′B′ の全体像が必要となる。

これらの困難を避ける便法の一つは，AB, A′B′ 部分で世界線がしていることを“記帳”できるような，無限大の自由度を系に導入することである。この余計な力学系が，**場**とよばれるものである。これによって相対論的な場と粒子の力学を作ることが可能で，作用積分(5.20)に基づいたマクスウェル-ローレンツ理論などがそれである。系は空間的距離をへだてて非局所的に相互作用するのではなく，局所点での粒子-場の相互作用を通じて結合している。影響が粒子間を伝わるのに有限な時間がかかることは，場にエネルギーと運動量とを運ばせることでつじつまが合う。作用と反作用は，すべての点での粒子-場の相互作用の中で互いにつり合っている。さらに，場の導入によって新たな型の現象が現われる。たとえば，自身の場と相互作用する粒子は，輻射の形でエネルギー放出することになる。

遠隔作用力学を相対論的につくることは可能であり，ニュートン(質点)力学の同時性面を，粒子間作用面として特殊相対論の光円錐で置き換えればよい。このローレンツ不変な結合の一例が図 5.9 に示されている。粒子 a は，未来的光円錐 1→2(遅延相互作用)に沿って直接に他の粒子 b に作用している。しかし実際としては，この種の相互作用をとることはできない。なぜなら，b は 2→1 に沿って a に反作用することができず，その代わりに 3 で a

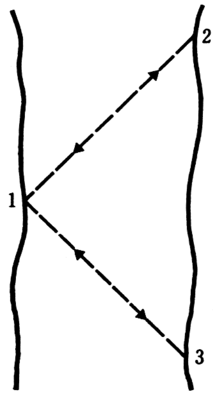


図 5.10 粒子 a と b との時間対称な作用

に反作用するが，粒子間の距離を増して 3 を 1 よりも任意に遅くすることができるからである。これを納得できるように修正したものが図 5.10 に示してある。前向き(未来へ)と後向き(過去へ)と**両方の**光円錐が対称的に使われている。このような時間対称的相互作用によって，粒子 a は 2 と 3 と両方で b に作用し，そして b は同様に a に反作用する。そのとき漸近的な意味で，通常の保存則を満足することができる[14]。

数学的には，このような相互作用はディラックのデルタ関数を使って表現できる。二つの世界線 $z_{(i)}$, $z_{(j)}$ 間の光円錐は，

$$(z^{\mu}_{(i)}-z^{\mu}_{(j)})(z_{(i)\mu}-z_{(j)\mu})=0 \tag{5.80}$$

の式を満たしている。(5.80)の左辺は簡略化して $(z_i-z_j)^2$ と表わす。そのとき，一つの世界線からの前方と後方への光円錐が他の世界線と交差するところを除いては，$\delta[(z_i-z_j)^2]$ はゼロとなる。零距離(null interval)，すなわち(5.80)を詳しく書くと

$$(z_i-z_j)^2=(\boldsymbol{z}_{(i)}-\boldsymbol{z}_{(j)})^2-(z^0_{(i)}-z^0_{(j)})^2 \tag{5.81}$$

であるが，恒等式

$$\delta(x^2-y^2)=\frac{1}{2x}[\delta(x-y)+\delta(x+y)]$$

を用いると，次の式が得られる：

$$\delta[(z_i-z_j)^2]=\frac{1}{2}\frac{\delta[|\boldsymbol{z}_{(i)}-\boldsymbol{z}_{(j)}|-(z^0_{(i)}-z^0_{(j)}])}{|\boldsymbol{z}_{(i)}-\boldsymbol{z}_{(j)}|}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\delta[|\boldsymbol{z}_{(i)}-\boldsymbol{z}_{(j)}|+(z^0_{(i)}-z^0_{(j)})]}{|\boldsymbol{z}_{(i)}-\boldsymbol{z}_{(j)}|} \tag{5.82}$$

式(5.82)の第1項は積分(5.2)($c=1$ とする)の遅延核の半分であり，第2項は対応する先進核の半分である。このことから，電磁力学における粒子間の時間対称的直接相互作用の理論は，次の形のラグランジュアン(粒子 i について)から導かれることの見当がつく：

$$L_i=-m_i(\dot{z}^{\mu}_{(i)}\dot{z}_{(i)\mu})^{1/2}-e_i\sum_{j\neq i}e_j\int\dot{z}^{\mu}_{(i)}\delta[(z_i-z_j)^2]\dot{z}_{(j)\mu}\mathrm{d}\lambda_j \tag{5.83}$$

式(5.83)の第1項は自由粒子 i に対する通常の運動エネルギーであり，第2項はニュートン理論でのポテンシャル エネルギー V に代わるものである。この項は，粒子 i の荷電 e_i が時間対称的直接結合を通じて，$j\neq i$ の他のすべての荷電 e_j と行なう相互作用の効果を表わす。このラグランジュアンは，他のすべての粒子の世界線にわたっての積分を含んでいるので，時間について非局所的であることに注意しよう。その結果，通常の微分方程式ではなく，運動の微積分方程式が導かれる。

系の動的振る舞いは，次の作用[15]を用いた変分原理から得られる：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}=&-\sum_i m_i\int(\dot{z}^{\mu}_{(i)}\dot{z}_{(i)\mu})^{1/2}\mathrm{d}\lambda_i\\&-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum e_ie_j\iint\dot{z}^{\mu}_{(i)}\delta[(z_i-z_j)^2]\dot{z}_{(j)\mu}\mathrm{d}\lambda_i\mathrm{d}\lambda_j\end{aligned} \tag{5.84}$$

この作用は，通常の場-粒子の作用(5.25)と対応している。第1項は両者とも同じであって，単に粒子の慣性を表わしているにすぎない。ただし(5.84)では，自由電磁場の作用を表わす項を含んでいない。なぜなら，この節の手法では独立な場の自由度は除かれてしまっているからである。(5.20)の第3項は，もしその A_μ を

$$A_\mu(x)=\sum_j e_j\int\delta[(x-z_j)^2]\dot{z}_{(j)\mu}\mathrm{d}\lambda_j \tag{5.85}$$

のように定義するならば，(5.84)の最後の項と同じようになる。こうして遠隔作用理論に用いられるときは，A_μ は基本的な量ではなく，他から**導かれる**補助的な量であることがわかる。場という言葉をまだ使ってはいるが，それはもはや独立に選ぶことはできなくて，常に粒子運動によって定まるものであるということを認めなければならない。さらに，(5.3節でやったようには)これらの場を作用の中で変分して場の運動方程式を得ることもできない。場の運動は，この理論の中に存在しないのである。

式(5.84)の最後の項は，i と j について，また過去と未来について対称的である。二重和はすべてのペアーを一度だけとるが，自分自身に働く項は含

んでいないので，この理論では無限大の自己エネルギーは起こらない。

式(5.85)にダランベルシャンを掛け，(5.17)と(5.19)とを用いると，次の関係が得られる：

$$\Box^2 A_\mu(x)=4\pi\sum_j e_j\int\delta^4(x-z_{(j)})\dot{z}_{(j)\mu}\mathrm{d}\lambda_j=4\pi j_\mu(x)$$

これはまさにマクスウェル理論の電磁波方程式である。［マクスウェル方程式のこの形を得るには，ローレンツ条件(5.15)を満たすことが要求された。いまの理論でもこの条件が成立していることは，(5.85)を微分してみればわかる。］ しかし，この方程式は場の運動方程式と解釈してはいけないもので，単なる一つの恒等式にすぎない。そして斉次方程式 $\Box^2 A_\mu=0$ には何の意味もなく，この式の任意解を A_μ に付加することはできない。場に対する境界条件に合わせる選択の自由度は，もはや存在しないのである。A_μ は，$F_{\mu\nu}$ がそうであるように，$\frac{1}{2}$ 遅延＋$\frac{1}{2}$ 先進 として(5.85)から完全に定まる。粒子 i に作用する場は，予想されるように，(5.60)によって与えられるものとなる。

この遠隔作用理論は，時間について対称的な電磁力学過程(たとえばファン・デル・ワールス力)の場合には，マクスウェルの場の理論と同じ結果を与えることは明らかであるが，時間について非対称な輻射機構に対しては，一般的には，結果は同じではないであろう。それにもかかわらず，5.7 節で証明されたように，不透明な箱の中に閉じ込められた系に対しては，輻射減衰は吸収体の応答として説明できる。遠隔作用理論にはそのとき，無限大の自己エネルギーがないという大きな利点がある。もしこの注目すべき理論を信じるならば，現実世界での完全遅延波の存在は，世界に対する束縛条件，すなわち世界は不透明容器の内側のように振る舞う，というおまけをもたらすことになる。これは種々の宇宙論の適否についての厳しい制約であり，そこでは，局所的な輻射現象の観測から宇宙論的観測の状態が推量できることになる。他方，反対の見方をすることもできよう。すなわち，もしいまの宇宙論的観測が不透明宇宙に味方しないのなら，そのときは遠隔作用理論が疑わしいことになる。どちらの場合にとっても，どの宇宙モデルが透明であり，どのモデルが不透明であるかを知ることが大切である。これが次の節の問題である。

5.9 宇宙は透明か不透明か

この問題に取り組む前に，吸収体理論での先進解を扱っておこう。5.7 節

で，二つの表現(5.60)と(5.61)の等価性を証明した。(5.62)もまた等価な形であると述べたが，基礎方程式の時間対称性から予想されるように，事実そのとおりである。遅延性の場合の方法を繰り返し，しかし時間の方向を逆にすることが，先進性の場合に必要である。すなわち，完全先進解と $\frac{1}{2}$ 遅延応答などを考えるとするのである。もちろん，こんどは，エネルギーが場から加速粒子に与えられる輻射反作用の“反減衰”がある。そうすると，もし完全先進解も完全遅延解も**とも**に許されるとすると，観測される輻射の非対称を，吸収体理論ではどうして説明するのであろうか。驚くべきことには，この問題への解答は(5.67)の中に隠されている。k の前の虚数 i は正負どちらの符号も可能なのに，(5.67)では輻射の**吸収**に対応するように，負符号が選ばれた。すなわち，吸収体理論で要求されるように，媒質中を伝播するにつれて場は指数関数的に減衰するとした。ところで，この符号は実際には勝手に選ぶことはできなくて，吸収媒質中で起こる過程によって定まるものであるが，どんな吸収が起こっているかについてはまだ何も述べていなかった。

古典的には，電離プラズマ(5.7節での吸収媒質モデル)中を伝播する電磁波はプラズマ イオンを動かし，そのイオンがこんどは前方に輻射を出すとき(トムソン散乱)，よく知られた波の分散となる。しかし，イオンに伝えられたエネルギーのすべてが再輻射されるのではないことに注意されたい。イオンの強制振動の間に，イオンはその熱運動によって相互衝突を起こし，その結果，波の電磁的エネルギーは減衰してプラズマの熱エネルギーに変換される。この種の過程は，プラズマ物理学では**衝突減衰**とよばれ，そして量子力学では**逆制動輻射**となる。熱エネルギーが単純に再輻射されないためには，多重衝突によってエネルギーが多くの自由度の間に広がらなければならない。この吸収は明らかに非可逆な**熱力学的減衰効果**である。すなわち，吸収体のエントロピーは増加する。吸収体でのこの熱力学的非対称性は，電磁輻射に一つの非対称を課すことになり，空洞中心の源から空洞壁へのエネルギー輸送は許されるが，逆向きには許されない。そこで，純粋に電磁気学的基礎の上では可能な先進自己整合解は，全くありえそうもないものとして外されてしまう。なぜなら，それは(5.67)の正虚数部すなわち波の指数関数的増大に対応し，空洞壁でのすべての粒子の共同的“反減衰”を要求するからである。そのとき壁のイオンは衝突によって励起され，空洞中心の荷電粒子が加速される瞬間に，ちょうど空洞中心に収束するようなコヒーレントな波を壁全体としてのイオンがつくりだすような輻射を行なうことになる。

これは重要な結果である。輻射の吸収体理論では，電磁力学的時間非対称性と熱力学的時間非対称性との密接な関連が充分に利用された。遅延“輻射”の存在は，吸収媒質の熱力学的性質によって可能となり，電磁輻射の時間方向は，宇宙でのエントロピー増加の時間方向によって定まる。これは，5.2節の議論ならびに5.7節のはじめの二つの文節とも一致している。もし荷電粒子が孤立した箱の中に永久に閉じ込められているのなら，マクスウェル理論であれ遠隔作用理論であれ，すべての非対称性は消えることが予想され，そしてもちろん，このような系では両者は等価である。そこでは揺らぎとポアンカレ周期が生じ，箱の壁が中心の荷電粒子に収束する光子雲を放出するというまれな事態も起こるであろう。これが“先進輻射”と解釈されるだろう。それは“遅延輻射”と同じ頻度で起こるであろう。

次には，どの宇宙モデルが未来光円錐上で不透明であるかを考える必要がある。実際の宇宙では，吸収はいろいろあり，星，銀河ガスやチリなどの銀河中の高密度物体や，銀河間ガスによるものである。

仮定として，銀河チリや星およびブラックホールなどの高密度物体は，光子束に対して周波数 ω に無関係な，幾何学的吸収断面積をもつとしよう。物体による吸収の割合は光子密度 ρ_γ に比例し，したがって R^{-3} に比例することになる。R が $t^{1/3}$ より早く増大しない限り，宇宙膨張につれて吸収比は t^{-1} よりもゆっくりと落ちるので，未来における全吸収は，対数的に発散する。すなわち，宇宙は不透明となる。この結果はまた，1個の光子の考察からも導くことができる。この光子が密度 ρ で断面積 σ の吸収物体を通過するとき $\mathrm{d}t$ の間に吸収される確率は $1-e^{-\sigma\rho\mathrm{d}t}\simeq\rho\sigma\,\mathrm{d}t$ であり，もし右辺の積分量が発散する，すなわち

$$\int^{\infty}\rho\sigma\,\mathrm{d}t=\infty \tag{5.86}$$

ならば，この確率は1となる。σ が一定の物体に対しては，条件(5.86)の極限として，$\rho\propto t^{-1}$ または $R\propto t^{1/3}$ となる。定常理論(7.2節)では ρ も σ も一定で，(5.86)はこの場合も満足されている。

銀河ガス(主として水素)は，銀河が充分に冷えてイオン再結合が起こるまでは，有効な吸収体であろう。この再結合によって気体と輻射は分離され，光の吸収は停止する。しかし，銀河間ガスは宇宙論的運動によって連続的に膨張しているので，それが充分に大きければ完全な再結合は妨げられ(もちろん再収縮モデルは除く——p. 152参照)，すべての銀河間ガスの光の吸収が止むわけではない。ベイツ(Bates)とダルガーノ(Dalgarno)[16]によると，電

子-陽子の再結合の単位時間あたりの確率は，$\rho_i T_i^{-0.75}$ に比例する。ここで ρ_i と T_i は，それぞれイオン密度とイオン温度である。水素の完全再結合は，したがって，もし次式のようであれば起こるだろう：

$$\int^{\infty} \rho_i T_i^{-0.75} \mathrm{d}t = \infty \tag{5.87}$$

これは $\rho_i T_i^{-0.75} \propto t^{-1}$ か，それよりもゆっくりであることが必要である。7.1 節で $T_i \propto t^{2/3} R^{-8/3}$ を示すことになるが，そうすると，$t^{1/2}$ より早く膨張するすべての宇宙モデルでは，常に未結合のイオンが残っていることになる。これにはアインシュタイン-ドゥ・シッターのモデル($t^{2/3}$)や開いたフリードマンのモデル($R \propto t$)も含まれる。

これらの自由イオンは，逆制動輻射によってどんな小さな周波数までも吸収可能である。これは重要なことである。なぜなら，宇宙論的赤方偏移によってどんな光子周波数も結局はいくらでも低くなるからである。実際には，ハッブル距離程度の距離を通過しても吸収は一般的にはわずかなので，この吸収の議論は長波長(古典的)極限 $\omega \to 0$ に限定してもかまわない。この機構による吸収の大部分は，電子と重い粒子(陽子，原子)の衝突によるものである。電子による光子吸収の実効平均断面積は[17]

$$\sigma = \frac{A\rho}{T_i^{1/2} \omega^3} (1 - e^{-\omega/kT_i}) \tag{5.88}$$

に比例する。ρ はすべての重い粒子の密度で，A は数因子および e, m, k の定数と，小さな変化を無視した対数因子を含んでいる。(5.88)の中の指数因子もまた無視してもよいだろう。なぜなら $\omega(\propto R^{-1})$ はイオン温度 T_i より早くは減少できないからである〔(4.16)と(4.18)とを思い起こされたい〕。

ρ, T_i と ω が，それぞれ R^{-3}, $t^{2/3} R^{-8/3}$ と R^{-1} に比例することを用いると，(5.88)の σ は $t^{-1/3} R^{4/3}$ に比例する。電子密度もまた R^{-3} のように落ちるので，(5.86)に代入すると，完全吸収のためには

$$\int^{\infty} R^{-3} t^{-1/3} R^{4/3} \mathrm{d}t = \infty$$

となることが必要で，その極限として

$$R \propto t^{2/5} \tag{5.89}$$

が得られる。この結果はまた，7.1 節で熱力学的に導かれるであろう。

結論として，通常の物質保存の宇宙モデルのわく内では，星間媒質による完全吸収は不可能ということになる。完全吸収の条件(5.89)は，吸収を行なうイオンの存在のための条件(5.87)とは両立できない。

未来において高密度状態にもどる再収縮モデルでは，様子はいささか異なってくる。条件(5.86)を R についての積分に変換すると

$$\int^{0} \frac{\sigma}{R^3 \dot{R}} \mathrm{d}R = \infty \tag{5.90}$$

最終特異性に近づくにつれて，$R \to 0$ で $\omega \to \infty$ である。このような状況での支配的な吸収機構は対生成で，それに対する断面積 σ は $\omega \to \infty$ で一定値に近づく。積分(5.90)はそのとき発散し，もし R が $t^{1/3}$ かそれより早く最終特異性につぶれてゆくなら，そのモデルは不透明になることを示している。一般相対論の場合には確かにそうであって，この領域では $R \propto t^{1/2}$ となっている(4.2節)。

電離プラズマの屈折率を含む古典式から，これらの結果を導こうという試みがいくつかある[18-21]。これらは，結果とはどれも関係のない共形変換，空間曲率や地平線の長い議論を含んでいて，一般の読者にはいささかわかりにくいであろう。おまけに，これらすべての試みは間違った答を導いた。記録を公正にするために，そして5.7節の議論と関連させるために，屈折率理論の一部を紹介しよう*。

式(5.86)の積分項 $\rho\sigma$ は**吸収率**とよばれ，屈折率 $\boldsymbol{n}$ の虚数部 $\boldsymbol{k}$ とは次の式によって結ばれる[22]:

$$\rho\sigma = 2k\omega \tag{5.91}$$

ところで，(5.88)は次のように書き換えられるとしてみよう:

$$\sigma = \frac{\omega_{\mathrm{p}}{}^2 \nu}{\omega^2 \rho} \tag{5.92}$$

ここで ω_{p} は**プラズマ周波数**とよばれ，$(4\pi\rho e^2/m)^{1/2}$ に等しい。ν は電子の重粒子との衝突周波数である:

$$\nu = \left(\frac{4\pi e^2}{m}\right) \frac{A\rho}{T_{\mathrm{i}}{}^{1/2}\omega} (1 - e^{-\omega/kT_{\mathrm{i}}}) \tag{5.93}$$

逆制動輻射に加えて，光子はコンプトン散乱も受けるわけで，これは長波長極限では断面積 $\sigma_{\mathrm{T}} = 8\pi e^4/3m^2$ の古典的なトムソン散乱に帰着する。これはもちろん媒質の分散性を与えるものであって，真の吸収を表わすものではない。しかし，それはやはり最初の波からはエネルギーを取り去るわけで，$\boldsymbol{k}$ の中に含めるべきものである。ときには真の吸収を**反応**断面積[23] とよんで，

---

* 電磁力学をリーマン空間に適用するには，ちょっとした注意が必要である[11]。しかし，マクスウェル方程式の共形不変性のために，ロバートソン－ウォーカー空間(共形的に平坦である)での状況は，ミンコーフスキー空間のそれと等価である。

トムソン散乱と区別することもある。σ_T を電子緩和時間 ϵ を使って書き直し

$$\sigma_T = {\omega_p}^2 \epsilon / \rho \tag{5.94}$$

これを(5.92)に加えると，**全実効断面積**が得られる。(5.91)から，これは屈折率の虚数部として次に対応している：

$$k = \frac{1}{2} \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} \left(\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right) \tag{5.95}$$

式(5.95)は，通常は振動電界の中の荷電粒子の運動方程式から古典的に導かれるが，それは $\omega \gg \omega_p$ に対してのみ有効な一つの近似にすぎない。一般式[17]は次のように表わされる：

$$(n_0 - ik)^2 = \left\{ 1 - \frac{{\omega_p}^2/\omega^2}{1 + \left[\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right]^2} \right\} - i \left\{ \frac{({\omega_p}^2/\omega^2) \left[\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right]}{1 + \left[\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right]^2} \right\} \tag{5.96}$$

いまの宇宙モデルでは $\omega/\omega_p \propto R^{1/2}$ なので，$\omega \gg \omega_p$ である。そのとき，(5.96)の右辺の第一の括弧の平方根を展開することによって，

$$n_0 \simeq 1 - \frac{\frac{1}{2}{\omega_p}^2/\omega^2}{1 + \left[\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right]^2} \tag{5.97}$$

$$k \simeq \frac{\frac{1}{2}({\omega_p}^2/\omega^2) \left[\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right]}{1 + \left[\omega\epsilon + \frac{\nu}{\omega} \right]^2} \tag{5.98}$$

が得られる。

式(5.97)と(5.98)の分母中の $[\omega\epsilon + \nu/\omega]^2$ は輻射減衰の効果を表わしている(5.4節)。通常それは完全に無視できるものであるが，小さな ω に対して $\nu/\omega \to 0$ (または一定値)になることから見ても，我々の関心の領域でも無視できる。したがって良い近似として

$$n_0 \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{2\pi\rho e^2}{m\omega^2} \simeq n$$

が得られるが，これは(5.69)に用いられた表現である。この近似でも(5.98)は(5.95)に帰着する。

k の反応部分(これが真の吸収を表わす)は，(5.96)の第二の括弧からくる。古典的表現では，(5.92)を用いると完全不透明条件(5.86)は

$$\int^{\infty} \frac{{\omega_p}^2 \nu}{\omega^2} \mathrm{d}t = \infty \tag{5.99}$$

となる。衝突周波数 ν の定義(5.93)から，条件の極限として $\nu \propto R^{-2/3}t^{-1/3}$ が得られ，これを(5.99)に代入すると，以前の結果 $R \propto t^{2/5}$ (5.89)が導かれる。

宇宙論的吸収問題のオリジナルな扱いの中でホウガース(Hogarth)は[18]，衝突減衰の温度依存を無視して(5.99)で $\nu \propto \rho \propto R^{-3}$ とおいて，$t^{2/5}$ ではなく $R \propto t^{1/4}$ という間違った結果を得た。もっと最近ではバーマン(Burman)[21]は温度依存を含めたのに，正しい関係 $T_{\mathrm{i}} \propto t^{2/3}R^{-8/3}$(7.1節)の代わりに $T_{\mathrm{i}} \propto R^{-2}$ を用い，また $e^{-\omega/kT_{\mathrm{i}}}$ の中で $\omega \ll kT_{\mathrm{i}}$ という誤まった極限をとったので，完全吸収のため極限条件として，$\nu =$ 一定 と $R \propto t$ とを得た。

定常宇宙論では，継続的な物質生成によって，星間媒質の物理状態は(大きな尺度で)時間とともに変わらず一定となっている。それで ρ, ν, ω_{p} はすべて一定となる。その一つの結果として $\omega/\omega_{\mathrm{p}} \propto R^{-1}$ となるので，輻射周波数は結局はプラズマ周波数以下に落ちてしまう。(5.96)を見ればわかるように，このような状況では n の実数部は負である。この状態は物理的には，輻射がプラズマ中を伝播できず反射されることを意味している。もし $\nu=0$ とすると，表皮効果層が ${\omega_{\mathrm{p}}}^{-1}$ となり，前方に指数関数的に減少する波があることになる。これは吸収を表わすものではなく，$\omega \to 0$ の極限で(5.96)の平方根から差し引かなければならない。そうすると $k \to \omega_{\mathrm{p}}/(2\omega\nu)^{1/2}$ となり，これから $k\omega \propto R^{-1/2} \propto e^{-Ht/2}$ が得られる。したがって積分(5.86)は**発散**しない。

これらの結果をここで要約しよう。銀河間ガスによる完全吸収は，現行のどんな宇宙モデルでも，また定常モデルでも起こらないが，星のような分離した物体による完全吸収は，定常モデルでは起こるし，また $t^{1/3}$(ディラックのモデル)かそれよりゆっくりと膨張する物質保存モデルでも起こる。さらに，振動モデルの終局の火の玉の中でも完全吸収は起こる。観測的なことでいえば，$t^{1/3}$ かそれより遅い宇宙膨張では，宇宙年齢が一般に可能と思われているよりも短くなるという困難がある。定常宇宙論は，宇宙的背景輻射を説明できないという重大な問題に苦しめられ，むしろ見捨てられてしまった。他方，フリードマンのモデルは，多くの宇宙論研究者が重視していない密度の観測(4.2節)を除いては，広い範囲で観測と一致している。

この章を終わるにあたって，ホィーラー(Wheeler)とファインマン(Feynman)[12]は吸収体理論でもう一つ別の自己整合解を与えたことを指摘しておこう。そこでは，未来光円錐は実際には透明であるのに，どんな荷電粒子にも完全遅延場が作用する。その可能性を理解するためには，図5.11を見ら

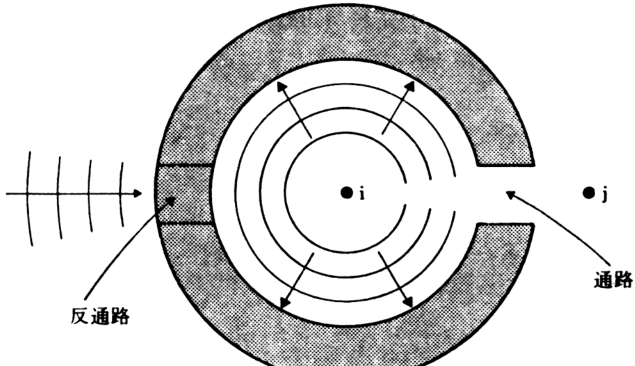


図 5.11 壁は通路の方向には透明ではあるが，通路の外側に置かれた荷電 j はなお全遅延場を受け，i には通常の輻射減衰力が働く。通路に壁があればそれによって吸収されたであろうエネルギーは，奇妙なことに，それが i から輻射される以前に反通路の外側の面に現われている。

れたい。これは，彼らが“通路”(passage)とよんだ穴が壁にあいている不透明な箱の図である。通路の反対側の壁の部分は“反通路”(anti-passage)と名づける。空洞中心にある荷電粒子 i は，すでになじみの吸収体応答のおかげで，通路のところを除く箱のすべての部分へ完全遅延場を放射するであろう。通路の方向には，i の場は最初は $\frac{1}{2}$ 遅延場のみのように見える。($\frac{1}{2}$ 先進場は，反通路方向の i の遅延場に対する反通路の応答場によって打ち消されている)。

その上，輻射減衰力のほうもそれにつれて減っていると予想されよう。しかし，反通路方向への i の $\frac{1}{2}$ 先進場がまだ考慮されていない。この場合は通路中に吸収物質がないので，それは打ち消されない。場の理論の言葉でいえば，この $\frac{1}{2}$ 先進場は無限遠からくる乱れとして現われ，そして，i が動かされる前に反通路の**外側**にきているものである。この場は前述のように吸収され，吸収されながら応答場を生じる。外側表面からの $\frac{1}{2}$ 先進応答は，無限遠から入射する $\frac{1}{2}$ 先進場を完全先進場にさせ，その間に，$\frac{1}{2}$ 遅延応答場は次のような効果を生じるであろう：

(1) 反通路の壁の厚さを通して，i の $\frac{1}{2}$ 先進場を打ち消す。すなわち，壁を通しての乱れの伝播はない。

(2) 空洞中の i の $\frac{1}{2}$ 先進場を打ち消してしまうので，空洞中には先進効果は何もない。

（3） 粒子 i に作用して通常の輻射減衰力を得る。

（4） 粒子 i の $\frac{1}{2}$ 遅延場を完全遅延場にさせる。すなわち通路の外に置かれた粒子は，完全遅延場を受ける。

粒子間直接作用の解釈では，通路を抜けて無限に向かう**エネルギー伝播**はありえない。輻射減衰力によって i から失われたエネルギーは，

（1） 箱の欠けていない内側表面上

（2） 反通路の外側表面

の両方に現われる。

後者の現象は，粒子 i が動かされてしまう以前にそれが起こるという点で，ますます異常である。図 5.12 にその様子がうまく示されていて，その二つの図はゴールド (Gold)[24] によって "ジグ" (zig) と "ザグ" (zag) と名づけられた。縦線は 2 粒子の世界線を表わし，一つは粒子 i であり，他は箱の壁の中の粒子である。世界線の太い部分は粒子の励起状態を示し，波線はこの励起エネルギーが 1 粒子から他の粒子へ送られる光円錐を示す。ジグもザグもともに時間対称的であることに注意されたい。通常の状態はジグ図形で表わされていて，正エネルギーが未来に向かっているが，上記の異常状態では，ザグ図形で表わされるような反通路の外側表面の加熱が起きる。これは負エネルギーが反通路からの過去光円錐に沿って i に向かう過程のように見えるが，それはまた場の理論では，以前に述べたように，正エネルギーの適当な重ね合わせとも見られる。

読者は，先進効果が直接的に表われてくるのに不満足で，このような自己

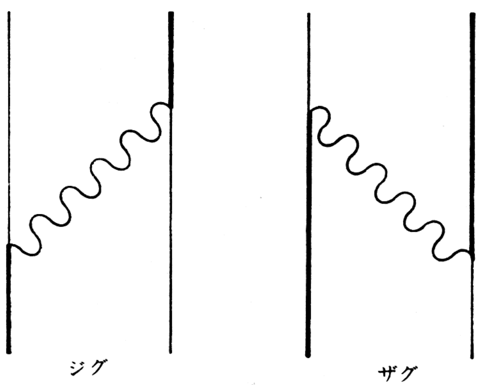


図 5.12 ジグとザグは共に 180° の回転によっては変わらない。

整合解を除外したくなるかもしれないが，次の理由によって，軽々しくそうすることはできない。永久膨張のフリードマン モデルでは，未来光円錐は透明ではあるが，過去の光円錐に沿っては，物質と輻射の分離前は極めて不透明である。それでこれらのモデルは図 5.11 のような性質をもっていることになる。しかしどんな先進効果も，分離前の遠い過去でのみ起こるだけで，それは全く観測されないものである。残念ながら，これらのモデルは 5.6 節でふれた対生成と対消滅の吸収連鎖効果によって困難を生じるように思われる。すなわち宇宙の中の全輻射出力のエネルギー密度は，初期段階で火の玉を加熱しすぎることなく何らかの方法で吸収されるようになっていなければならない。宇宙の中の全物質がこの電磁エネルギーからつくられたとしてもなお，黒体光子の密度は物質密度の 10^8 倍程度にしかなりそうもない。それにもかかわらず，初期段階をめぐる不確定要素が多いので，この反対もあまり強いものとはなっていない。

参考文献

1. たとえば，W. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1963) sec. 6.6.
2. P. M. Morse and H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953) sec. 6.2.
3. W. D. Jackson: 上掲 1, sec. 6.7.
4. D. W. Sciama: Proc. Roy. Soc. (A) **273** (1963) 484.
5. O. Penrose and I. C. Percival: Proc. Phys. Soc. **79** (1962) 605.
6. K. R. Popper: Nature **177** (1956) 538; **178** (1956) 382; **179** (1957) 1297; **181** (1958) 402.
7. 自発性条件 (spontaneity proviso) は開放系に対しては落としてもよい。E. L. Hill and A. Grunbaum: Nature **179** (1957) 1296.
8. たとえば，J. L. Anderson: *Principles of Relativity Physics* (Academic Press, New York, 1967) appendix.
9. J. L. Anderson: 上掲 8, p. 219.
10. P. A. M. Dirac: Proc. Roy. Soc. (A) **167** (1938) 148.
11. G. F. R. Ellis and D. W. Sciama: "Global and non-global problems in cosmology" *General Relativity—Papers in Honour of J. L. Synge*, ed. L. O'Raifeartaigh (Clarendon Press, Oxford, 1972).
12. J. A. Wheeler and R. P. Feynman: Rev. Mod. Phys. **17** (1945) 157.
13. P. C. W. Davies: Ph. D. thesis, London University, 1970, appendix 1.
14. J. A. Wheeler and R. F. Feynman: Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 425.　J. L.

Anderson：上掲 8, sec. 7, 8, 9.
15. A. D. Fokker：Z. Phys. **58** (1929) 386.
16. D. R. Bates and A. Dalgarno："chapter 7" *Atomic and Molecular Processes*, ed. D. R. Bates (Academic Press, New York, 1962).
17. V. L. Ginzburg：*The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (Pergamon Press, Oxford, 1964) p. 488.
18. J. E. Hogarth：Proc. Roy. Soc. (A) **267** (1962) 365.
19. F. Hoyle and J. V. Narlikar：Proc. Roy. Soc. (A) **273** (1963) 1；**277** (1964) 1.
20. P. E. Roe：Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **144** (1969) 219.
21. R. Burman：The Observatory **90** (1971) 240；**91** (1971) 141.
22. たとえば，R. W. Ditchburn：Light, 2nd ed. (Blackie, London, 1963) chap. 15.
23. W. D. Jackson：上掲 1, p. 606.
24. T. Gold：*The Nature of Time* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1967) pp. 35–41.

より進んだ読者には

1. D. K. Sen：*Fields and/or Particles* (Ryerson Press, Toronto, 1958). J. L. Anderson：*Principles of Relativity Physics* (Academic Press, New York, 1967). このどちらの本も粒子間直接作用の理論を広く扱っている。後者はまた，先駆加速を含む吸収体理論にも簡単にふれている。吸収体理論が述べられているものには次の文献がある。J. Hogarth, F. Hoyle and J. V. Narlikar：*The Nature of Time*, ed. T. Gold (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1967) chap. 1, 2.
宇宙モデルの吸収性質の簡単な説明と，以前の仕事の批判については次のものがある。P. C. W. Davies："Is the universe transparent of opaque ?" J. Phys. (A) **5** (1972) 1722.
2. J. V. Narlikar："Neutrinos and the arrow of time in cosmology" Proc. Roy. Soc. (A) **270** (1962) 553.
3. 先進輻射の検出を目ざす実験の詳細については，次の二つがある。R. B. Partridge："Absorber theory of radiation and the future of the universe" Nature **244** (1973) 363. M. L. Herron and D. T. Pegg："A possible experiment on absorber theory" J. Phys. (A) (to be published).

6

量子力学の時間非対称

6.1 微視的可逆性の量子原理

一般に，量子力学の法則は時間反転に対して不変である，といわれている。しかし，このいい方には用心深い注意が必要である（議論は非相対論的量子力学に限る）。

量子力学では，一般的な時空変換は，ヒルベルト空間中の状態ベクトルの1次変換によって表わされる。もし物理系が時空変換に対して対称であるならば，観測量はこの変換に対応するヒルベルト空間の変換に対して変わらないはずである。観測量としては二つの型がある。

(1) 状態ベクトル $|\phi\rangle$ を他のベクトル $|\psi\rangle$ へ射影したもの，すなわち $\langle\psi|\phi\rangle$ の絶対値。これは $|\phi\rangle$ で表わされる系が観測によって $|\psi\rangle$ の中に見出される確率振幅である。

(2) 観測量 β の状態 $|\psi\rangle$ での期待値 $\langle\psi|M|\psi\rangle$。$M$ は1次のエルミート演算子で，その固有ベクトル $|\phi_n\rangle$ は完全にヒルベルト空間を張っているので，$\sum|\phi_n\rangle\langle\phi_n|=1$（エルミート共役は "†" によって示す）。

ヒルベルト空間での変換によって，$|\phi\rangle\to|\phi'\rangle$，$|\psi\rangle\to|\psi'\rangle$，$M\to M'$ なら

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle|=|\langle\psi|\phi\rangle| \tag{6.1}$$

$$\langle\psi'|M'|\psi'\rangle=\langle\psi|M|\psi\rangle \tag{6.2}$$

となることが必要である。変換を行なう1次演算子を U で表わすと，

$$|\phi'\rangle=U|\phi\rangle \tag{6.3}$$

$$U(a|\phi\rangle+b|\psi\rangle)=aU|\phi\rangle+bU|\psi\rangle \tag{6.4}$$

となる。U の逆変換を U^{-1} とすると，次のようになる：

$$U^{-1}|\phi'\rangle=|\phi\rangle$$

さて，もし $\langle\psi'|\phi'\rangle=\langle\psi|\phi\rangle$ すなわち

$$\langle\psi U^{\dagger}|U\phi\rangle=\langle\psi|\phi\rangle$$

なら，(1)は不変量である。これは $U^{\dagger}U=1$，つまり U がユニタリ $U^{-1}=U^{\dagger}$ であればよい。演算子に対する変換関係式は(6.2)の助けを借りて得られる：

$$\langle\psi'|M'|\psi'\rangle=\langle\psi U^{\dagger}|M'|U\psi\rangle=\langle\psi|U^{\dagger}M'U|\psi\rangle=\langle\psi|M|\psi\rangle$$

このためには，$U^{\dagger}M'U=M$ でなければならない。ユニタリの場合には

$$U^{\dagger}M'U=M \quad または \quad U^{-1}M'U=M \tag{6.5}$$

となる。

ユニタリ演算子は，時間反転以外のすべての対称演算を記述することがわかる。これを見るために，次の変換を行なうユニタリ演算子 T を考えよう：

$$t\to -t \qquad \boldsymbol{p}\to -\boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{r}\to -\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{\sigma}\to -\boldsymbol{\sigma}$$

ここで，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\sigma}$，はそれぞれに，直進運動量，位置，スピンを表わす演算子である。既知の物理系は，K 中間子(6.4 節)を含むものを除いて，T 変換に対して不変のハミルトニアン H をもっている：

$$T^{-1}HT=H \tag{6.6}$$

状態ベクトル $|\psi\rangle$ の時間変化は，シュレーディンガー方程式で与えられる：

$$H|\psi\rangle=i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \tag{6.7}$$

式(6.7)に左から T を作用させて，次のようになる：

$$TH|\psi\rangle=Ti\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=-i\frac{\partial}{\partial t}(T|\psi\rangle)$$

しかし，(6.6)から $TH|\psi\rangle=H(T|\psi\rangle)$ なので

$$H(T|\psi\rangle)=-i\frac{\partial}{\partial t}(T|\psi\rangle)$$

すなわち

$$H|\psi'\rangle=-i\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle \tag{6.8}$$

である。(6.7)と(6.8)とを比べて，$|\psi'\rangle$ は $|\psi\rangle$ と同じ式には従わないことがわかる。これは驚くことではない。なぜなら，非相対論的量子力学では H は空間変数の 2 次の関数であるが，(6.7)は時間について 1 次だからである。このような式は，時間反転対称を示すとは思われない。

しかし，シュレーディンガー方程式の解はそれ自身では観測量ではなく，(6.8)の i の符号を変えるだけで対称性が現われる。これは，新しい演算子

$\Theta = TK$ を定義し，K はそのあとのすべての数の複素共役をとる演算子とすればよい。(6.7)の左から Θ を作用させて

$$\Theta H|\psi\rangle = \Theta i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = -i\Theta\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}(\Theta|\psi\rangle) \tag{6.9}$$

もし H が実数なら，$[K, H]=0$ である。そのとき(6.6)から，$[\Theta, H]=0$ となる。その結果，(6.9)は次のようになる：

$$H(\Theta|\psi\rangle) = i\frac{\partial}{\partial t}(\Theta|\psi\rangle)$$

Θ は実際には非線形演算子である。(6.4)にもどって表現すると

$$\Theta(a|\phi\rangle + b|\psi\rangle) = a^*\Theta|\phi\rangle + b^*\Theta|\psi\rangle$$

$$\langle\psi'|\phi'\rangle = \langle\psi\Theta^\dagger|\Theta\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle$$

ここで，“*”は複素共役を表わす。しかし

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|$$

なので，Θ による変換では，物理的内容は変わらないままである。Θ は**反ユニタリ**演算子とよばれる。

これらの考察は，通常，**微視的可逆性の量子原理**としてまとめられている。時刻 t_1 に系が状態 $|\psi\rangle$ にあると仮定し，後の時刻 t_2 に，それが状態 $|\phi\rangle$ の中にある確率 w を問うことにしよう。t_2 での状態ベクトルは，シュレーディンガー方程式(6.7)を形式的に積分することによって，$|\psi\rangle$ で表わすことができる。この新しいベクトルは

$$U(t_2, t_1)|\psi\rangle$$

となり，ここで $U(t_2, t_1)$ は

$$U(t_2, t_1) = e^{-iH(t_2-t_1)} \tag{6.10}$$

で，**展開演算子**とよばれるものである。確率 w は

$$w = \langle\phi|U(t_2, t_1)|\psi\rangle \tag{6.11}$$

となる。次に逆確率 w_{rev}，すなわち t_1 に系が $K|\phi\rangle$ の状態にあり，t_2 に状態 $K|\psi\rangle$ に見出される確率を考えよう。これは次の形となる：

$$w_{\mathrm{rev}} = \langle\psi K^\dagger|U(t_2, t_1)|K\phi\rangle$$

式(6.10)の定義と H の実数性から

$$U(t_2, t_1) = K^\dagger U^\dagger(t_2, t_1)K$$

となり，すべての $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$, t_1, t_2 に対して，微視的可逆性が導かれる：

$$w = w_{\mathrm{rev}} \tag{6.12}$$

式(6.12)を記号的に書くと

$$\mathrm{prob}(|\phi\rangle \to |\phi\rangle) = \mathrm{prob}(K|\phi\rangle \to K|\phi\rangle)$$

と表わされ，古典的原理(2.14)に対応している。

このように量子力学の物理的性格は可逆的なのに，時間に関しては非対称のように見える多くの量子力学的過程がある。たとえば，核の放射崩壊である。非対称は一般に，考えている系の特殊な初期条件と開放性に関連して現われている。これをもっと明らかにするには，その中では可逆性が保たれている有限系を考えて，無限(開放)系の極限をとるとき，どうして非対称が入ってくるかを見るのがよい。

固有状態 $|\phi_n\rangle$ の組の完全直交系をとると，一般の状態ベクトルは $|\phi_n\rangle$ で展開できる

$$|\phi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle \tag{6.13}$$

ここで

$$a_n = \langle \phi_n | \phi \rangle \quad および \quad \sum_n |a_n|^2 = 1$$

である。簡単のために，縮退や連続の固有状態は考えないことにする。系の時間展開を記述するには，状態ベクトル $|\phi\rangle$ の代わりに，時間依存の係数 a_n を用いてもよく，シュレーディンガー方程式は，次の方程式で置き換えられる：

$$\dot{a}_n = -i \sum_m H_{nm} a_m \tag{6.14}$$

ここで H_{nm} はハミルトニアンの行列要素である：

$$H_{nm} = \langle \phi_n | H | \phi_m \rangle \tag{6.15}$$

考える簡単な例は系の集合であって，個々の系は，基底状態と励起状態という二つの安定状態のみにとどまれるものとする。基底状態のエネルギーはすべてゼロであるが，n 番目の系の励起状態のエネルギーを E_n で表わす。時刻 $t=0$ で系 p はエネルギー E_p の励起状態にあるが，他の系はすべて基底状態にあるとしよう。系 p はそのとき相互作用ハミルトニアン H_int を通じて他の系と結合している。簡単のために H_int はすべての系にとって同じであると仮定する。時間 t の後には，系 p が基底状態にあり，そして他の結合系の一つが安定した励起状態にあるという確率は有限である。定常状態 $|\phi_m\rangle$ に，m 番目の系が励起され，他のすべての系は基底状態にある全系の確率振幅を a_m で表わすと，a_m についての式は(6.14)から次のように表わせる：

$$\dot{a}_\mathrm{p} = -i \sum_m H_\mathrm{int} a_m \exp\{-i(E_m - E_\mathrm{p})t\} \tag{6.16}$$

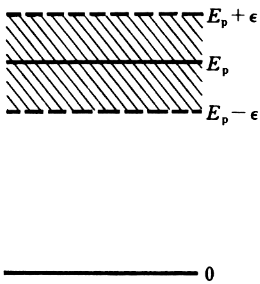


図 6.1 励起は系 p から，$E_p-\epsilon$ と $E_p+\epsilon$ との間の狭いエネルギー幅の中にある他の状態の一つに伝えられる。

$$\dot{a}_m = -iH_{\text{int}}^{\dagger} a_p \exp\{i(E_m - E_p)t\} \tag{6.17}$$

連立微分方程式(6.16)と(6.17)の組は，ラプラス変換ですぐに解ける。(6.17)の a_m を(6.16)に代入すると，微積分方程式

$$\dot{a}_p(t) = -\sum_m |H_{\text{int}}|^2 \int_0^t a_p(\tau) \exp\{-i(E_m - E_p)(t-\tau)\} \tag{6.18}$$

が得られる。(6.18)の両辺のラプラス変換をとり，たたみ込み定理を使って

$$s\mathcal{L}[a_p] - a_p(0) = -|H_{\text{int}}|^2 \sum_m \mathcal{L}[a_p]\mathcal{L}[\exp\{-i(E_m - E_p)t\} \tag{6.19}$$

となる。この(6.19)を書き直し，最後の項のラプラス変換を計算し，そして $a_p(0)=1$ の初期条件を用いると

$$\mathcal{L}[a_p] = \left\{ s + |H_{\text{int}}|^2 \sum_m \frac{1}{s + i(E_m - E_p)} \right\}^{-1} \tag{6.20}$$

固有エネルギー E_m については，まだ何も定めていない。ここで，すべての E_m は次のようなエネルギー範囲にあると仮定しよう：

$$E_p + \epsilon > E_m > E_p - \epsilon$$

ここで

$$H_{\text{int}} \ll \epsilon \ll E_p \tag{6.21}$$

である(図 6.1)。条件(6.21)は物理的には，$|E_m - E_p| \gtrsim \epsilon$ であるような基底状態と励起状態との間の遷移確率は無視できるということである。さらに問題を簡単化して，E_p のまわりの $E_p \pm \epsilon$ の範囲に，準位 E_m は対称的で，エネルギー ギャップは ΔE の等間隔になっているように選ぶ(図 6.2)。こうして

$$E_m - E_p = m\,\Delta E \qquad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm N) \tag{6.22}$$

そのとき，可能な励起状態の全数は $2N+1 \simeq 2\epsilon/\Delta E$ である。系の数が多く

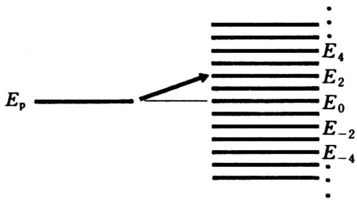


図 6.2 $E_p-\epsilon$ から $E_p+\epsilon$ へのエネルギー領域が等しい間隔 $\varDelta E$ をもつ $2N+1$ 個の準位に分けられている。N が増大するにつれて $\varDelta E$ は減少し，$N\to\infty$ の極限では連続状態となり，開放系に対応する。

なればなるほど準位間隔は小さくなり，状態の密度 $(\varDelta E)^{-1}$ は大きくなる。(6.20)の中の和は

$$\sum_{m=-N}^{+N}\frac{1}{s+im\,\varDelta E} \tag{6.23}$$

と書けるが，(6.21)のおかげで，限界 $\pm N$ を $\pm\infty$ に拡張してもたいした誤差は生じない。そのとき(6.23)の中の和は正確に計算できて

$$\frac{\pi}{\varDelta E}\coth\left(\frac{\pi s}{\varDelta E}\right) \tag{6.24}$$

である。最後に，(6.24)を(6.20)に代入すると，次のように表わせる：

$$\mathcal{L}[a_p]=\left\{s+\frac{\pi|H_{\rm int}|^2}{\varDelta E}\coth\left(\frac{\pi s}{\varDelta E}\right)\right\}^{-1} \tag{6.25}$$

さて，有限な N と非連続な固有エネルギー E_m に対して極めて一般的に，振幅 a はポアンカレ周期を示すことが証明される[1]。このことは実際に，わずか二つの同じ系が結合している場合にはすぐにわかることで，(6.25)で $\varDelta E\to\infty$ の極限をとって見ればよい。この極限では

$$\mathcal{L}[a_p]=\frac{s}{s^2+|H_{\rm int}|^2}$$

逆変換によって，

$$|a_p|^2=\cos^2(|H_{\rm int}|t) \tag{6.26}$$

が得られるが，これは明らかに時間について対称であり，周期 $2\pi/|H_{\rm int}|$ で回帰することを示している。

系の数が増えるにつれて状態密度 $(\varDelta E)^{-1}$ は増大し，ポアンカレ周期はより長くなる。$\varDelta E\to 0$ という逆の極限は $N\to\infty$ に対応し，すなわち開放系となる。

この場合には

$$\mathcal{L}[a_{\rm p}]=\frac{1}{s+\dfrac{\pi}{\Delta E}|H_{\rm int}|^2}$$

で，これから次の関係が導かれる：

$$|a_{\rm p}|^2=\exp\left(\frac{-2\pi|H_{\rm int}|^2t}{\Delta E}\right) \tag{6.27}$$

これが，励起状態からの通常の時間非対称的崩壊であり，よく知られた半減期 $\Delta E/2\pi|H_{\rm int}|$ をもっている。開放系のこの極限では，ポアンカレ揺らぎによって励起状態が p 状態にもどる確率はゼロに近づく。この簡単なモデルは，5.7 節の箱の問題で述べた光子の記述に好都合であり，箱を開くことが $N\to\infty$ に対応する。ルービンによって厳密に取り扱われており，3.5 節の終わりに述べた古典的減衰問題とも比較してみるとよい。

6.2 量子統計力学

量子統計力学の主題は，本質的に統計的な性格をもつ量子論を，既存の統計的わく組へつなぐことである。これは位相空間を用いて行なうことはできない。我々の観測分解能に対する絶対的な限界である $\hbar^{6N}$ 次元の細胞が存在しているからである。量子的な場合の最もエレガントな形式は，**密度行列**に基づくものである。

その理論形式は，方程式の組(6.14)の中の振幅を用いて表現される。これらの a を用いて，演算子 M の期待値 $\langle\phi|M|\phi\rangle$ は

$$\langle M\rangle=\sum_n\sum_m a_m{}^*a_n\langle\phi_m|M|\phi_n\rangle=\sum_n\sum_m A_{nm}M_{mn}=\mathrm{tr}(AM) \tag{6.28}$$

となり，ここで tr は対角線和，A_{nm} は A の行列要素 $a_m{}^*a_n$ を表わす。

$\langle M\rangle$ として(6.28)の形を用いる利点は，系の集合を記述するように一般化できることである。たとえば，可能な状態 $|\phi_i\rangle$ をもつ $\mathcal{N}$ 個の系の集まりを考えよう。ここで

$$|\phi_i\rangle=\sum_n a_n^{(i)}|\phi_n\rangle \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \mathcal{N})$$

である。そのとき**量子的**平均 $\langle M\rangle$ の**統計的**平均 $\overline{M}$ は

$$\begin{aligned}\overline{M}&=\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}}\langle\phi_i|M|\phi_i\rangle=\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}}\sum_n\sum_m a_m^{(i)*}a_n^{(i)}M_{mn}\\&=\sum_n\sum_m\hat{\rho}_{nm}M_{mn}=\mathrm{tr}(\hat{\rho}M)\end{aligned} \tag{6.29}$$

$\hat{\rho}$ は**統計演算子**で，行列形式では密度行列とよばれる。その定義は

$$\hat{\rho}_{nm}=\frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} a_m^{(i)*}a_n^{(i)}=\overline{a_m{}^*a_n} \tag{6.30}$$

である。$\hat{\rho}$ は，古典統計の場合に Γ 空間中の点の密度を表わすものとして 2.4 節に定義された ρ に，極めて類似している〔たとえば，(6.29)と(2.37)とを比較せよ〕。さらに，(6.14)から，$\hat{\rho}$ は時間的には次式に従って展開することがわかる：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}-i[\hat{\rho},\ H]=0 \tag{6.31}$$

ここで交換子 $[\hat{\rho},\ H]=\hat{\rho}H-H\hat{\rho}$ は，古典的なポアソン括弧の量子的な対応である。こうして(6.31)は，リウヴィルの定理(2.41)に極めて似ているものとなる。$\hat{\rho}$ は，次の性質をもっていることがわかる。

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho})=1 \tag{6.32}$$

$$0\leq\hat{\rho}_{nn}\leq 1 \qquad （すべての\ n\ に対して） \tag{6.33}$$

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)\leq\mathrm{tr}(\hat{\rho}) \tag{6.34}$$

さらに，$\mathrm{tr}(\hat{\rho}M)$ はヒルベルト空間でのユニタリ変換に対して不変である。変換行列 S

$$|\phi_{\mathrm{p}}\rangle=\sum_n S_{\mathrm{p}n}|\phi_n\rangle$$

に対して，$\hat{\rho}$ は通常の量子演算子のように変換する

$$\hat{\rho}'=S\hat{\rho}S^{-1} \tag{6.35}$$

もし対象とする系の正確な量子状態が知られているなら，すべての系が同じ状態にあるような集合を選ぶことができる。そのとき集合は，純粋状態にあるという。この場合 $\hat{\rho}_{nm}=\overline{a_m{}^*a_n}=a_m{}^*a_n$ で，$\hat{\rho}$ は行列 A になってしまい，理論は，一つの系の通常の波動関数的表現と同じになる。**純粋状態**に対しては，(6.30)の定義から

$$\hat{\rho}^2=\hat{\rho} \tag{6.36}$$

式(6.32)から

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)=1 \tag{6.37}$$

であるが，混合状態に対しては

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)<1 \tag{6.38}$$

である。

さて，(6.31)は次のように形式的に積分できる：

$$\hat{\rho}(t)=e^{-iHt}\hat{\rho}(0)e^{iHt} \tag{6.39}$$

しかし e^{iHt} はユニタリ演算子なので，(6.39)は，(6.35)の中で $S=e^{-iHt}$ と置いた特殊な場合にすぎない。このような変換に対して $\mathrm{tr}(\hat{\rho}M)$ は不変なので，$M=1$ と置くと

$$\mathrm{tr}\,\hat{\rho}(t)=\mathrm{tr}\,\hat{\rho}(0) \tag{6.40}$$

となる。その上，任意の n に対して次の関係を示すことができる：

$$\mathrm{tr}[\hat{\rho}(t)]^n=\mathrm{tr}[\hat{\rho}(0)]^n \tag{6.41}$$

特に $n=2$ のとき，(6.41)と(6.37)と(6.38)とから，**純粋状態からは混合状態へ展開しない**ということがわかる。

古典的定義(2.47)に対応して細分割量子的 H 関数を

$$\sigma=\mathrm{tr}(\hat{\rho}\log\hat{\rho}) \tag{6.42}$$

と定義し，そして，細分割エントロピーを

$$S=-k\,\mathrm{tr}(\hat{\rho}\log\hat{\rho})$$

と定義する。純粋状態のエントロピーはゼロであることに注意しよう。$\log\hat{\rho}$ は $\hat{\rho}$ のベキ級数に展開できるので，(6.41)から，孤立系が自然展開する間は σ と S は**一定**であるということが導かれる：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=0 \tag{6.43}$$

これは古典的な(2.49)と同じである。

量子統計力学を，第2章と3章とに概説した古典論の跡をたどりながら進めよう。我々の関心は，なめらかな剛体壁をもち断熱的に閉じられた箱の問題であって，その中には弱い相互作用をしている同じ粒子が多数入っているが，粒子密度は低いとする。

系は有限なのでエネルギー スペクトルは非連続ではあるが，巨視的系なので，準位間隔は極めて小さく巨視的手段では識別できない。したがって，これらの準位をまとめて一組のグループとすることができる(Γ 空間のスターと対応)。組 ν は G_ν 個の固有値をもち，平均エネルギーは E で，間隔は ΔE とする。エネルギー測定の量子力学的精度については，ハイゼンベルグの不確定性原理によって，常に限界 η がある。系のエネルギーについて次のように仮定する：

$$\Delta E \ll \eta \tag{6.44}$$

現実の物理系を表現する集合をつくるには，通常の方法による。たとえば，$\hat{\rho}$ がハミルトニアンだけの関数であるような，定常な集合があって，このような場合(6.31)から $\hat{\rho}$ は一定となる。特に重要なのは，ヒルベルト空間中のユニタリ変換に対して不変な一様集合

$$\hat{\rho}_{nm}=\hat{\rho}_0\,\delta_{nm} \qquad (\hat{\rho}_0=\text{一定}) \tag{6.45}$$

と，ミクロカノニカル集合

$$\hat{\rho}_{nm}=\begin{cases}\hat{\rho}_0\,\delta_{nm} & (E<E_m<E+\delta E)\\ 0 & (\text{そのほか})\end{cases} \tag{6.46}$$

である。ここで E_m はエネルギー固有値の m 番目の準位である。エネルギー測定の巨視的限界 δE については

$$\Delta E \ll \eta \ll \delta E \tag{6.47}$$

のように仮定する。もし，エネルギー間隔 ΔE の中に N 個の非縮退エネルギー準位が含まれているなら，$\rho_0=1/N$ と選ぶことにする。

古典論での等**アプリオリ**確率という仮説Dに対応する要請が，量子統計力学でも必要である。(6.45)という一様集合の定常性は，特定の量子状態が他に対して量子的に優先するものではないことを示しているので，次の仮定をするのは妥当であろう：

系に関する何の情報もないときは，どの可能な量子状態に系が見出されるかは，すべて等しい確からしさである。　(F)

しかし，状態の重ね合わせが可能性なので，ヒルベルト空間中での展開演算やユニタリ変換に対して代表系が不変であるためには，仮説Fだけでは充分ではない[2]。上記の不変性は，しかし次のような**乱雑位相**(random phase)の要請があれば間に合う：

系に関する何の情報もないときは，異なる量子状態の位相は乱雑に分布している。　(G)

仮説FとGとに矛盾しない代表集合は，一様集合(6.45)である。もし系についての部分的情報があるときは，この情報と矛盾しない量子状態の振幅はすべて等しく，その位相は乱雑に分布しているというように，適当な集合がつくられる。たとえば，全エネルギーが δE の精度でわかっているのなら，ミクロカノニカル集合(6.46)を使う必要がある。

こうして，古典論と対応させながらほとんど同じように量子論を進めることができる。特に，波動関数に対するポアンカレの回帰定理を証明できるし，また量子的エルゴード定理もつくれる[3]。しかし量子的 H 定理は，古典論にない興味深い性質を含んでいる。

まず次のことに注意しよう。弱い相互作用下にある孤立した薄い気体に対する単一系の量子的 H 定理は，2.3節の議論に沿って証明できる。古典的定

義(3.1)に似た H の定義として[4]

$$H=\sum_i\left[\alpha g_i\log\frac{g_i}{n_i}-(n_i+\alpha g_i)\log\left(\frac{g_i}{n_i}+\alpha\right)\right] \tag{6.48}$$

ここで g_i はグループ i の中の 1 粒子の固有状態の数であり，n_i はこのグループの中の状態を占めている粒子の数で，位相空間の細胞に類似の量である。α は，ボーズ-アインシュタイン統計かフェルミ-ディラック統計かによってそれぞれ，$+1$ か -1 の値を用いる〔もし $\alpha=0$ なら，(6.48)は古典的定義(3.1)となり，ボルツマン統計に対応する〕。

式(6.48)を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}\log\left(\frac{n_i}{g_i+\alpha n_i}\right) \tag{6.49}$$

古典論の場合のように，$\mathrm{d}n_i/\mathrm{d}t$ を知るにはまず運動方程式を積分しなければならない。しかし我々はその代わりに，衝突による量子状態間の遷移確率を考えて，それを基本仮説 F と G とに従って計算し，この量の平均値を得ることにする。状態グループ(i, j)と(k, l)との間を遷移する単位時間あたりの平均粒子数 Z は，ふつうの量子力学的散乱理論によると[4]

$$\begin{aligned}Z_{ij}{}^{kl}&=A_{ij;kl}n_in_j(g_k+\alpha n_k)(g_l+\alpha n_l)\\ Z_{kl}{}^{ij}&=A_{kl;ij}n_kn_l(g_i+\alpha n_i)(g_j+\alpha n_j)\end{aligned} \tag{6.50}$$

である。微視的可逆性の量子原理(6.12)によって，遷移確率 A についは次の関係が要求される：

$$A_{ij;kl}=A_{kl;ij} \tag{6.51}$$

式(6.51)は古典的関係(3.6)と等しく，H 定理証明の中で，これが**本質的な段階**である。それは基本仮説 F と G と，そして量子力学の微視的可逆性とから導かれた。

もし，(6.50)と(6.51)とを(6.49)に用いて計算すると，直ちに

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\leq 0 \tag{6.52}$$

が得られ，これが単一系に対する量子的 H 定理となっている。(6.52)の中の等符号は，ボーズ-アインシュタイン分布かフェルミ-ディラック分布($\alpha=+1$ か -1 である)に対してのみ成り立ち，古典論でのマクスウェル平衡分布の量子的な対応となっている。

同一な系の集合に対する H 定理を，もう少し詳しく議論しよう。一つの系が状態 n に見出される確率は $\hat{\rho}_{nn}=\overline{a_n{}^*a_n}$ で，**細分割確率**とよばれている。G_ν 個の近傍の状態をもつグループの中で巨視的な識別ができないなら，

そのグループの中に集団のメンバーを見出す確率 P_ν もまた求めなければならない。すなわち

$$P_\nu = \sum_{n=1}^{G_\nu} \hat{\rho}_{nn} \tag{6.53}$$

粗分割密度(または確率) P_{nn} は，n で表わされる共通の性質をもつ状態グループに対し，次のように定義される：

$$P_{nn} = \frac{P_\nu}{G_\nu} = \frac{1}{G_\nu} \sum_{n=1}^{G_\nu} \hat{\rho}_{nn} \tag{6.54}$$

$\hat{\rho}_{nn}$ も P_{nn} もともに，1に規格化されている：

$$\mathrm{tr}\,\hat{\rho} = \mathrm{tr}\,P = 1 \tag{6.55}$$

粗分割 H 関数はそのとき

$$\bar{H} = \mathrm{tr}(P \log P) = \sum_n P_{nn} \log P_{nn} \tag{6.56}$$

のように定義され，これが細分割 H 関数 σ(6.42)と比較されるものである。しかし σ とは異なり，孤立系に対しては時間的に一定では**ない**。$t=0$ で観測したとき，系は状態グループの一つの k にあるとしよう。仮説 F と G とによれば代表集合は

$$\hat{\rho}_{kk}(t=0) = P_{kk}(t=0) \tag{6.57}$$

$$\bar{H} = \sum_k \hat{\rho}_{kk}(0) \log \hat{\rho}_{kk}(0) \tag{6.58}$$

のように組み立てられているが，後の時間 t では，(6.57)の等号はもはや成立しない。この間の $\bar{H}$ の変化は，したがって

$$\bar{H}(0) - \bar{H}(t) = \sum_k \hat{\rho}_{kk}(0) \log \hat{\rho}_{kk}(0) - \sum_n P_{nn}(t) \log P_{nn}(t) \tag{6.59}$$

で与えられる。P_{nn} は定義により状態グループ n にわたって一定であるから，(6.59)の最後の項を $\sum_n \hat{\rho}_{nn}(t) \log P_{nn}(t)$ で置き換えると，次のようになる：

$$\bar{H}(0) - \bar{H}(t) = \sum_k \hat{\rho}_{kk}(0) \log \hat{\rho}_{kk}(0) - \sum_n \hat{\rho}_{nn}(t) \log P_{nn}(t) \tag{6.60}$$

この表式を進めてゆくのには，$\hat{\rho}_{nn}(t)$ と $\hat{\rho}_{kk}(0)$ との間の関係を見出すことが必要である。これは，密度行列の議論に便利な形のシュレーディンガー方程式(6.14)を積分すればよく，それは $\hat{\rho}$ に対する定義(6.30)から導かれるものである。(6.10)の展開演算子 U の行列要素を用いると

$$\hat{\rho}_{nm}(t) = \sum_k \sum_l U_{ml}{}^* U_{nk} \overline{a_l{}^*(0)\, a_k(0)} \tag{6.61}$$

$$\hat{\rho}_{nn}(t) = \sum_k |U_{nk}|^2 \hat{\rho}_{kk}(0) + \sum_{k \neq l} \sum U_{nl}{}^* U_{nk} \hat{\rho}_{kl}(0) \tag{6.62}$$

となり，(6.62)の右辺の第1項は $\hat{\rho}$ の対角要素のみを含んでいるのに，第2項は非対角要素を含んでいる。仮説 G によって $\hat{\rho}_{kl}(0)$ を乱雑位相をもつように選ぶと，(6.62)の第2項は消える。そのとき

$$\hat{\rho}_{nn}(t)=\sum_k |U_{nk}|^2\hat{\rho}_{kk}(0) \tag{6.63}$$

これから簡単な計算で，**クラインの関係式**[5]として知られる関係が得られる：

$$\sum_k \hat{\rho}_{kk}(0)\log\hat{\rho}_{kk}(0)\geq\sum_n \hat{\rho}_{nn}(t)\log\hat{\rho}_{nn}(t) \tag{6.64}$$

このクラインの関係式を(6.60)に加えると，次式が得られる：

$$\bar{H}(0)-\bar{H}(t)\geq\sum_n [\hat{\rho}_{nn}(t)\log\hat{\rho}_{nn}(t)-\hat{\rho}_{nn}(t)\log P_{nn}(t)]$$

最後に，この式の右辺にゼロの量である $\sum_n [P_{nn}(t)-\hat{\rho}_{nn}(t)]$ を加えると

$$\bar{H}(0)-\bar{H}(t)\geq\sum_n [\hat{\rho}_{nn}(t)\log\hat{\rho}_{nn}(t)-\hat{\rho}_{nn}(t)\log P_{nn}(t)-\hat{\rho}_{nn}(t)+P_{nn}(t)] \tag{6.65}$$

となる。この(6.65)の角括弧は決して負にはならない。したがって，結論として

$$\bar{H}(0)\geq\bar{H}(t) \tag{6.66}$$

を得て，これが集合に対する量子力学的な一般化 H 定理である。

6.3　量子的観測理論

式(6.66)で表わされるような $\bar{H}$ の減少には，異なる**二つの**原因がある。第一には(6.57)によるもので，これは初期の瞬間 $t=0$ で粗分割確率と細分割確率が等しいことを述べている。しかし，後の時刻にはこの等号は成立しない〔$\hat{\rho}_{kk}(t)\neq P_{kk}(t)$〕ので $\bar{H}$ は，古典的 $\bar{H}$ 定理と同様の理由で減少する。すなわち細分割的 ρ の粗分割スターまたはグループ状態への広がりである。第二は，クラインの関係式(6.64)が**細分割**行列 $\hat{\rho}_{kk}$ に関する不等性を**すでに含んいでる**ことである。古典論にはこれに対応する関係式はなく，古典量 $\int\rho\log\rho\,dq\,dp$ は，(2.49)によって時間的に一定である。実際に(2.49)の量子的対応は(6.43)であるが，これは $\bar{H}$ 定理の議論に関連する量ではない。(6.43)の σ は，$\hat{\rho}$ が対角のときのみ $\sum\hat{\rho}\log\hat{\rho}$ に等しくなるが，これがまさに(6.64)の等号の場合である。したがって，量子力学特有の**新しいタイプの時間非対称性**は密度行列中の非対角要素によるものであり，これを注意深く吟味してゆこう。

6.2節のはじめに述べたように，量子統計力学には二種類の統計的要因が含まれる。すなわち，古典統計力学におけるような観測精度の限界からくるものと，量子力学自身の統計的性質に内在するものとである。新しい型の非対称性はこの後者に由来するもので，**単一量子系**の場合にもこのような非対称性は存在し，時間の経過につれて確率は可能な量子状態へ広がってゆくもので極めてなじみ深いものである。この現象には多くの例があり，特に量子波束の広がりはその典型である[6](これは古典の拡散方程式と同じ式に従う)。

さて，6.1節の量子的な微視的可逆原理から予想されるように，乱されない孤立量子系の自然展開は時間非対称的ではないという事実を表わすものとして，(6.43)がある。しかし，クラインの関係式に含まれる非対称性はこの“自然”展開から生じるのではない。クラインの関係式(6.64)は，ρ の非対角項が**はじめから**消滅している(アプリオリ乱雑位相)と仮定する時のみ有効である。［系の動的展開は初期の位相の乱雑性を壊すことになる。］この最初の瞬間 $t=0$ というのが系の最初の観測に対応し，それに応じて適当な代表集合が仮説FとGとに従ってつくられることになる。そのとき $\bar{H}$ の後の値を決めるのには，つづいての観測が必要である。古典力学における系の観測は，なんら動的な影響を系に及ぼすとは考えられない。なぜなら観測は原理的には，系に及ぼす任意に小さくかつ予見可能な乱れ効果であるからである。しかし量子力学ではどんな測定も，測定されつつある量に共役な観測量に対して，無視できず予見できない影響を与える。たとえば，粒子の位置測定は常に粒子の運動量に対して予見できないような乱れを与える。しかし統計力学では非常に多くの粒子を扱っているが，このような巨視的系に対しては，この測定の乱れ効果は**粗分割的**振る舞いについては影響を無視できる。したがって，H 定理や時間非対称などの古典的議論は，量子力学的考察によっても影響されないはずである。それにもかかわらず，量子的測定の過程に**微視的非可逆性**が入ってくるように見える。古典論における微視的可逆性は容器の壁を通じて外界との確率的な結合によって破れるが(3.5節)，これが量子力学における“測定装置”との外的結合による微視的可逆性の破れと密接に対応していることがわかる。

量子的非可逆性の性質はその起源よりも理解しやすい。もし量子系が初めにある純粋状態 ψ にあったとすると，これはある観測量 α に対応する演算子の固有状態 ϕ_n の重ね合わせ〔式(6.13)〕として記述できる*：

---

* 今後は簡単のために，しばしば〈｜と｜〉の記号を省く。

$$\psi = \sum_n a_n \phi_n \tag{6.67}$$

これから次の密度行列が与えられる：

$$\hat{\rho}_{nm}^{(1)} = a_m{}^* a_n \qquad (\text{純粋状態}) \tag{6.68}$$

α を測定すると，系が ϕ_n の状態に見出される確率は $|a_n|^2$ である。それが現実には状態 ϕ_j にあるとしよう。そのとき測定の過程によって状態ベクトルは突然に ψ から ϕ_j に変わったことになる：

$$\sum_n a_n \phi_n \rightarrow \phi_j \tag{6.69}$$

これが“波動関数の崩壊”としてよく知られた現象である。実験者が系の置かれた状態 ϕ_j についての**知識**を得るときに起こる非可逆変化についてはここでは問題にしない。それは古典的観測の場合と異なることなく，投げたコインが表になったか裏になったかを見るようなものである。［この“実験者の意識に入る”ことに関連する非対称性は，脳における通常のエントロピー増加にすぎないであろう。］ この非本質的な複雑さを避けるために，測定装置は実験者（あるいは他の誰でもよい）によって“読まれ”ないで，測定がされた後は異なる状態 ϕ_n は相対確率 $|a_n|^2$ で現実化されるといえるだけだと仮定しよう。そうすると新しい状態は一つの**混合**によって記述されるはずで，密度行列 $\hat{\rho}^{(2)}$ は

$$\hat{\rho}_{nm}^{(2)} = |a_m|^2 \delta_{nm} \tag{6.70}$$

によって与えられる。これは，もし**第二**の測定がされるなら演算子 M をもつ観測量 β の期待値は

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^{(2)} M) = \sum_n \sum_m |a_m|^2 \delta_{nm} M_{mn} = \sum_n |a_n|^2 M_{nn} \tag{6.71}$$

となるであろうという意味である。他方，最初の測定がされて**いなかった**とすると，この期待値は，上の代わりに，

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^{(1)} M) = \sum_n \sum_m a_m{}^* a_n M_{mn} = \sum_n |a_n|^2 M_{nn} + \sum_{n \neq m} \sum a_m{}^* a_n M_{mn} \tag{6.72}$$

であって，非対角要素の存在だけが，(6.71)とは異なっている。

量子的観測過程の時間非対称は，(6.68)と(6.70)，あるいは(6.71)と(6.72)とを比べることで明らかになる。観測の過程は $\hat{\rho}$ の非対角要素をなくしてしまったのである。こうしてエントロピー $S = -k\,\mathrm{tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$ は最初のゼロ（これは純粋状態）から

$$-k \sum_n |a_n|^2 \log |a_n|^2 > 0 \tag{6.73}$$

へ変わってしまった。上の和の中の非対角要素が消えるからである。同様に，演算子 M をもつどんな他の量の期待値も通常は重ね合わされた異なる状態間の干渉項を含んでいて，それは(6.72)では $n \neq m$ の二重和として表わされているが，測定によってこれらの項がなくなり，(6.71)のように記述される。

純粋状態(6.68)から混合状態への変換は，(6.41)に関連して述べたように，孤立系のユニタリ展開演算子では表現できない。しかしこのような変換は測定過程の中で実際に起こっているわけで，測定の下の量子系は次の二つの異なる方法で変化しているように見える：

（1）　シュレーディンガー方程式で記述されるような通常の展開の間は可逆的に変化する。

（2）　シュレーディンガー方程式で記述できない測定過程の間は非可逆的に変化する。

しかしこの表現は以下の理由によっていささか矛盾しているようである。測定装置自身は原子から構成されていて，原理的には量子力学の法則にもまた従うべきものである。装置を古典的に考えて(コペンハーゲン流の解釈[7])対象系のみが量子力学的に記述されるとする代わりに，対象系プラス測定装置の全体を一つの大きな結合量子系と見なすなら，その振る舞いは(原理的には)**全体系**に対する展開演算子によって記述され，そのときこの展開は可逆である〔タイプ(1)の変化〕。測定過程の非可逆性に対して，そのとき何が起こったのであろうか。

巨視的な測定装置を量子的記述の中に組み込もうとするこの試みはフォン・ノイマン(von Neumann)[8] によって，彼の“測定過程論”の中で行なわれた。単一の微視的対象系Ⅰと測定装置として働く巨視的系Ⅱとを考えよう。(我々が測定しようとしている)系Ⅰの中に観測量 α があり，それは固有関数の完全直交規格化の組 ϕ_n をもつであろう。そして他の観測量 γ が系Ⅱにあって(たとえば目盛上の針の位置)，それも完全直交規格化の固有関数 Φ_n をもつであろう。最初($t=0$)，系Ⅰは純粋状態 ψ にあり，そして系Ⅱはその固有状態の一つ(針のゼロ位置に対応して Φ_0 としよう)にある。ψ はそのとき ϕ_n で展開できて

$$\psi = \sum_n a_n \phi_n$$

となるので，系(Ⅰ+Ⅱ)の全体の純粋状態は最初に

$$\Phi_0 \sum_n a_n \phi_n \tag{6.74}$$

と表現される。α の測定という行為は系 I と II とを短い時間 τ のあいだ結合させるので，系は一緒になって次のような最終状態へ，シュレーディンガー方程式に従って展開する。

（1） 固有状態 ϕ_n は相互作用によってはあまり影響されない。

（2） α の測定値は系 II の固有状態 Φ_n(たとえば針の位置)を見ることなどによって得られる。

フォン・ノイマンはこれらの要求を満たす全体系 I+II のハミルトニアン H が存在するということを示した。すなわち，このような H の一つとして

$$e^{-iHt}\Phi_0 \sum_n a_n \phi_n = \sum_n a_n \phi_n \Phi_n \tag{6.75}$$

がある。そのとき系 I と II との結合の結果として

$$\Phi_0 \sum_n a_n \phi_n \to \sum_n a_n \phi_n \Phi_n \tag{6.76}$$

という遷移が，全量子系の(可逆な)ユニタリ展開に従って起こることになる。したがって最終状態は**やはり純粋状態**である。しかし ϕ_n と Φ_n との間にはいまや**相関**があり，それは系 II の観測が系 I の測定として役立つことを意味している。さらに，系 II が Φ_n に見出される確率 $|a_n|^2$ は，系 I が ϕ_n に見出される確率に等しく，後者は測定装置を系に対して外的(そして古典的)と考えたときの通常の測定の記述(6.67)の中に用いられたものである。いま系 I の中にだけあると考えられる演算子 M をもつ観測量 β について第二の測定をしようとすると，量子力学の規約に従って，系 II の状態にわたっての期待値をとることが必要である[9](系 II の存在は I で得られる M の値には何の違いも生じない)。このとき状態 $\sum_n a_n \phi_n \Phi_n$ の中の相関性によって，この期待値の中の非対角干渉項($n \neq m$)はすべて消え去り，(6.72)の代わりに(6.71)を得ることになる。だから，最初の測定を行なうことの効果は，コペンハーゲン流の解釈で要請されているように，系 I における干渉項を消すことにある。

このようなことにもかかわらず，(6.76)の右辺はやはり純粋状態である。全体系 I+II の密度行列はまだ非対角項をもち，そして(6.37)を満たしている。全エントロピー S は一定にとどまり，非可逆性はないであろう。この段階で，量子力学形式の**解釈**についての深刻な困難に遭遇する。量子系はヒルベルト空間中の状態ベクトルによって記述され，それは一般には異なる状態

の**重ね合わせ**であり，たとえば(6.67)で表わされるようなものである。他方，人間存在の巨視的世界では，状態のこのような重ね合わせに意味があるとは思われない。装置の一部分である針は一つの位置かまたは他の位置にあるべきであって，何か奇妙なやり方で**両方**にあるべきではないということは直感的に感じられる。もちろん，現実の針の位置はわかっていないかも知れない(我々がそれを見ていないかも知れないから)し，その場合には我々は種種の可能な針の位置に対してある確率を割り当てることを余儀なくされるのである。しかし，これは世界に対する我々の側からの見方に関連する純粋に古典的な制約であって，重ね合わせとは全く異なる概念である。簡単にいえば，現実世界で意味のある唯一の量はいろいろの確率をもつ状態の**混合**であって，その中では巨視的に可能な状態間の干渉項は存在しないのである。それでは測定行為が意味のある結果を与えるためには，測定過程の間のどこかで純粋状態と混合との間に遷移が起こるはずである。測定装置を量子系にとって外的であるとすると，この遷移は装置の中で起こると思われる。しかし装置もまた量子系の一部であるときは，上に見たようにこの説明は成立たないで，(6.76)の右辺は見かけ上“非現実的”な状況を記述していることになる。純粋状態から混合へ(または量子的記述から“現実的”記述へ)の遷移は，測定過程の時間非対称性と不可分であるということから，以下にパラドックスを解こうとするいくつかの試みを吟味しよう。

量子形式の巧妙な再解釈によって，上記の困難を避けようとする多くのすぐれた試みがあった。フォン・ノイマン (von Neumann)[8] は，結合系 I+II がこんどは次の系 III によって測定されるなら $\hat{\rho}$ の干渉項は消えるであろう，と指摘した。しかし，干渉項は系 I+II から消えても III に現われるだけであり，同じことがつづいてゆく。測定のこの見かけ上無限の鎖が切れるのは，それ自身は量子力学の法則には従わない真に“外的”な系が全量子系と相互作用をするときのみである。ある人々は，このような外的な系は最終的に装置の針を見る実験者(頭脳ではない)の“心”(mind)のようなものとして解釈しているようである。

こうして干渉項の破壊は波動関数の崩壊と同一視できる。この説明では，量子測定過程の時間非対称性の起源は個々の人間の意識の中に置かれていて，これは“心理物理対応”(psycho-physico parallelism)とよばれるもので，特にウィグナー (Wigner)[10] によってとり上げられた。

解析の中にこのような非物理的な仮定を導入しないで鎖を断ち切ろうとす

る他の試みもあった。エヴァリット(Everette)[11] の解釈では，決定論的に展開する全宇宙の波動関数に至って鎖が終わりとなる。そして世界はたえず**すべて**の量子的可能状態(quantum alternatives)に分裂(splitting)をつづけており，これらの多数の平行世界は干渉しないので特定の観測者はその中の一つのみを認めると仮定すれば，量子力学の確率的局面は保存される。時間における分裂の方向が測定過程の時間非対称を決めている。もちろん，この分裂は，いま考えている宇宙の特定の"分枝"の中に起きている過程に依存するであろう〔たとえば，シュテルン－ゲルラハ(Stern-Gerlach)の実験は世界を二つに分けている〕。これらの過程はまた分枝の熱力学に依存している。ある分枝はエントロピー増加の世界を表わしているのに，他の分枝はエントロピー減少の世界(その中でシュテルン－ゲルラハの実験は"逆行"する)を表わしているであろう。この状況はまさにロシュミットのパラドックスの量子力学版である。宇宙の全波動関数の時間展開はユニタリ(時間対称)でなければならない。それにもかかわらず，エヴァリット分枝のほとんどすべてがエントロピー増加世界になるのに，極く少数の組しかエントロピー減少にならない。しかし測度ゼロの分枝はエントロピー一定の世界になるであろう。

別の解釈としてボーム(Bohm)[12] は，熱力学での隠された微視的自由度に対応して隠された変数を導入し，決定論的な構造的量子(subquantum)世界を提案している。測定行為は新しい力学方程式で記述され，それは時間反転のもとで非対称となっている。しかし統計力学と同様な等**アプリオリ**確率の仮説を行なえれば，量子力学の通常の結果が得られる。

測定パラドックスのもう少し身近な解決は，測定装置の波動関数の中の干渉項は残しておくが，それらは重要ではないと主張することである。(どんな用途でも)装置の現実の部分では異なる固有状態 Φ_n は**巨視的に識別可能**なはずというのがその根拠である。たとえば，目盛上の針の異なる位置や乾板の感光した写真エマルジョンの異なる場所とかいったもので巨視的に識別可能である。装置は巨視的対象なので，波動関数 Φ_n のコヒーレントな重なり合いが生じるのに必要な時間は途方もなく大きく，宇宙年齢よりもずっと大きい[13]。だから，観測は微視的対象系Iの量子性を巨視的装置IIに移すことになるが，そのIIでは途方もなく永いあいだ量子性は検出されないでいる。こうして，極めて良い**近似**として，密度行列の非対角項は消してもよい。それは現実には決して検出されないだろうと安心できる。しかし，この解釈では量子観測の非可逆性が明らかに消えてしまった。**正確**な計算では常に純粋

状態が保たれているであろうから。

このような時間における非対称の解釈は新しいものではない。第3章でも，系のポアンカレ周期に比べて充分短い時間間隔に限るなら，粗分割化の導入によって非対称的なエントロピー変化になることを示した。それにもかかわらず，(孤立)系の正確な微視的振る舞いはやはり可逆であり，時間の中での向きは定まっていない。量子観測論での装置の波動関数のコヒーレンス時間は，ポアンカレ回帰時間に対応するもので，どちらの場合も実際の状況における人間の観測には限界があるので時間非対称が現われるが，全体系の底に可逆性は常に存在しているのである。さらに，測定の際に対象Iの微視的振る舞いの中にいつも入ってくる非可逆性は古典的な微視的非可逆性(細分割エントロピーの増加)とよく似たもので，後者は系の容器の壁を通してくる乱雑乱れによるものであり，3.5節に述べた。外的装置による測定がハミルトニアンのユニタリ展開を妨げるのでヒルベルト空間の状態ベクトルがユニタリでない方法で突然飛躍するのと同様に，外界からの乱れが全ハミルトニアンによって記述される連続な軌跡を妨げるときΓ空間の中の代表点も突然飛躍することになる。

両方の場合に，より大きな系を考えることによってハミルトニアン記述は復元するし，そして可逆性も復元する。どちらの場合にも，下部系(subsystem)の非可逆性は，系の時間非対称にとって重要な意味をもたない。

この類似をさらに進めることができよう。すなわち，ある閉じた系の外界への結合を，読み取りをしない一連の量子測定と見なすことによって，量子$\bar{H}$定理がクライン・レンマとして表わされるであろう[14]。(6.61)からわかるように，ρが当初は対角であったとしても非対角項はその後徐々に成長し，そしてこの非対角項がクライン・レンマの不等号に対応している。一連の観測は，コヒーレンスを壊し干渉項を除去することによって，繰り返して$\hat{\rho}$を**対角化**する効果をもっている。これは3.3節の仮説Eの状況とどこか類似している(70ページの12行目の注意を参照)。それで，クライン・レンマのみに基づいた$\bar{H}$定理は，3.5節に論じた“外界”による非可逆性の量子的な対応であることがわかるであろう。

このように量子観測の非可逆性を理解したとき，さらにその起源を追及するのも教育的であろう。その源は測定装置の状態の巨視的識別可能性に関係しているが，その状態はまた装置の内部構造の結果である。多くの著者によって強調されているように，測定器機の本質的な性質は，装置の初期条件が

熱力学的準安定であることである。これには次のような多くの実例がある。霧箱は水滴の生成に対して不安定のように作られている。また，写真乾板は光が存在するとき化学反応に対して不安定であるなどである。準安定性は装置をトリガーする量子信号を**増幅**するために不可欠の条件なのである。この増幅の結果，装置はかなり早く安定平衡状態に向かい，その安定状態はIの初期状態と相関があり，Iの他の状態と相関のある近傍の安定状態とは巨視的に識別できる。このような増幅は明らかに**粗分割**エントロピー(細分割的ではない)の増加を含んでいる。こうして，量子測定の非可逆的**性質**は巨視的系のコヒーレンス時間が大きいことによるものであるが，非可逆性の**源**は明白に熱力学の領域の中にあり(エヴァリットの解釈のように)，それは次いで分枝系の生成と関連し(第3章と4章に述べたように)，最終的には宇宙の起源と，そして重力の本質と関係している。測定装置における量子統計力学の詳しい解析は，ダネーリ，プロスペリ，ロインガー(Daneri, Prosperi, Loinger)[16]によって行なわれた。

量子観測の非可逆性の源は熱力学的特性であるとすると，揺らぎが起こり，エントロピーは時間の両方向に対称的に変化するような，全く孤立したボルツマン型の箱の中での測定過程の状況が問題となろう。このとき実際に，時間の**両方向**への予測を含むような測定の量子力学の規則に，矛盾はないことを証明できる[17](3.3節の終わりの注意を思い起こされたい)。

$\mathcal{N}$ 個の系をある完全な組の中の一つの状態 ϕ_n に設定する実験者Aを考えよう。そして他の実験者Bは後の時刻に通常の意味である量を測定し，後者に対応する演算子 M は固有関数 $\{\phi_m\}$ の完全な組をもつとしよう。ϕ_m の中にBが見出す系の数は量子力学の要請によれば $\mathcal{N}|\langle\phi_m|\phi_n\rangle|^2$ である。他方，系がある特定の状態にあるというBの測定に基づいて，先のAの測定はどうであったかを問われても，必要な情報は測定の非可逆性によって壊されてしまっていて，はっきりとした返事は与えられない。しかし，もし実験が繰り返され，Aが等アプリオリ確率で全く**ランダムに**状態を設定するなら，その時これらのうちのある程度の数の系はBによって状態 ϕ_m にあると見出されであろう。もしこんどは実験者Bに対して，これら ϕ_m の系のうちどれだけがAによって ϕ_n にあるとされていたかをたずねると，結果はもちろん，$\mathcal{N}|\langle\phi_n|\phi_m\rangle|^2$ である。そこには測定過程に関する完全な対称性がある。しかし実際には，等**アプリオリ**確率によってAは系を設定したという，Bの仮定は正当ではない。なぜなら $\mathcal{N}$ 個の系は外界との相互作用によって分枝

としてつくられたかもしれず，それは初期状態 ϕ_n に対して不規則ではない選択を課すことになるからである。しかし全く永久に孤立した系では，**等アプリオリ**確率は正当であり，そこで予想されるように長い時間の尺度では量子測定の非対称性は消滅する。しかしまれな揺らぎが起こっているあいだは，その時のエントロピー変化の方向によって，上記の前向きか後向きかどちらかの予想手続きをとる必要があるだろう。

6.4　素粒子過程での T の破れ

この本でここまでは，すべての時間非対称性は系の境界条件に根ざしていると仮定していた(法則的というよりも実際的な非対称)。閉じた永久に孤立した系はこの場合，何度も強調したように時間の中での不変な向きを示すことはできない。この事実は，古典式(2.14)とかその対応量子式(6.12)を通じて表現されているように，最終的には系の構成物の微視的可逆性の結果である。この可逆性は時間反転あるいは素粒子物理学で知られている T 変換(1.6 節)に対する，系の構成物の運動方程式の不変性として表わされることがある。

すべての物理法則は T 不変であるべきだと長年のあいだ思われてきた。これは電磁的や重力的相互作用のもとに動いている粒子に対しては確かにそうであるが，素粒子の強い相互作用や弱い相互作用の発見は，対称原理全体にわたっての疑問をよび起こした。1957 年に，弱い相互作用(β崩壊を起こす)は，もともとは空間座標の反転である**パリティ変換**に対する P 不変性を破ることが見出された[18]。そのときなお P と荷電共役 C(荷電の符号を変える)とを結びつけた操作に対しては不変性は保たれるであろうと予想された。しかし CP 不変性もとうとう破棄されなければならなかった[19]。いまは，かなりゆるやかで妥当なある仮定のもとでは，結合操作 CPT は不変であるということが示される[20]。もし CPT が保持されるなら，T は単独では変わるはずである。実際に，中性 K 中間子の崩壊ではそうであることが見出された[21]。

$$K^0 \to \pi^{\mp} + e^{\pm} + \bar{\nu}_e$$

$$\text{または}\quad K^0 \to \pi^{\mp} + \mu^{\pm} + \bar{\nu}_\mu$$

この過程は，**運動法則**自身が時間の中でどちらに優先的に方向づけられているかを示す唯一の例である。

T を破る物理法則は基礎的観点からは極めて意義あるものではあるが，K 中間子の性質が，この本に論じてきた非対称過程と実際に何らかの関連があるかどうかは明らかでない。特に，K 中間子の崩壊を適当に用いても，孤立

系の中のエントロピー減少を生じることは不可能であることが示された。熱力学第2法則は安泰なのである[22]。ユニタリ性は依然として保存されるというのが証明の本質的な点であり，そして $\bar{H}$ 定理の有効性にとって必要なのは詳細微視的可逆性よりもむしろこのユニタリ性なのである。総和規則によれば，ユニタリ性は相互作用中の T 破壊部分の大きさの上限を与え，それ以上ではエントロピーが減少するような極限になっていることが示される。もちろん，T 破壊成分の存在をエントロピー増加へ寄与させることもできる。これについては，系の外界との残存結合とか，あるいは量子測定過程とかと同様な立場である。これら三つの場合すべてに，微視的可逆性の破れがあるが，系の粗分割平衡への緩和時間が時間非対称の主役であることに変わりはない。

6.5 タキオン

これまでの第二の仮定は，扱うすべての粒子は時間的な世界線に沿って動くということであった。このような仮定は，継起事象の時間的順序がローレンツ変換の下で保存されるために必要である(1.1 節を参照)。

しかし空間的な軌跡をたどるような粒子，つまり光より速く走る粒子の存在も考えられるであろう。このような仮説的粒子は**タキオン**(tachyon)とよばれるが[23]，その存在はまだ実験により証明されていない。ところで質量のあるふつうの粒子を**タルディオン**(tardyon)，そして質量のない粒子を**ルクソン**(luxon)と通常よんでいる。

特殊相対論によると，粒子のエネルギー E と運動量 p とが不変の長さ $m_0{}^2$ の4元ベクトルをつくる：

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m_0{}^2 \tag{6.77}$$

m_0 は粒子の**静止質量**といわれるもので，すべての既知の粒子に対しては純粋に実の量である。その結果，エネルギー運動量ベクトル p^μ は時間的であり，$|E|>|\boldsymbol{p}|$ である。粒子が静止しているときは $\boldsymbol{p}=0$ で $E=m_0$(根号の正をとる)である。非常に高い運動量という他の極限では，$E\simeq|\boldsymbol{p}|$ で粒子速度は光速に近づく。速度 v で動く粒子の相対論的質量 m は静止質量 m_0 と次の式の関係がある：

$$m = \frac{m_0}{(1-v^2)^{1/2}} \tag{6.78}$$

$v\to 1$(光速)で $m\to\infty$ となる。しかし，もし m_0 が純虚数なら，p^μ は空間的で $|\boldsymbol{p}|<E$ となるであろう。これは $v>1$ である限り常識には反しない。そ

のとき(6.78)の m はやはり実数となるからである。そのとき粒子を止めることができないので，静止質量 m_0 はもちろん測定できない。

タキオンの振る舞いはかなり奇妙である。たとえば，最も安定な状態(ゼロエネルギー)は無限大の速度状態となっている。もっと驚くことには，タキオンの世界線に沿って時間的順序が壊れていることである。タキオンとタルディオンとが相互作用することができるなら，タキオン“電話線”を二人の実験者が通信に使うことができるであろう。回線に沿ってAがBに信号を送ると仮定しよう。AとBに対して動いている観測者から見れば，信号の方向が逆転しているような事態も起こりうる。もし原因と結果の時間順序を平気で放棄するならこの事態は何の障害も起きない。けれども，タキオンを発信したり受信できる装置をそなえた多数の実験者を含むもっと複雑な実験を考えると，矛盾する状況が起こりうるのである[25]。その中には，自分自身の過去の信号を送る能力といったような気味の悪い可能性も含まれる。そのときは，それ以前にその信号を受けなかったときのみ信号を伝達するような器械をつくることができる。その場合に，もしこの器械が信号を受けると，それは信号を出さないであろう。これは明らかな矛盾である。

タキオンのこれらなじみにくい性質も，もしタキオンとタルディオン間の相互作用が実在しないとか，不規則で制御できないと仮定するなら，その存在を妨げるものではない[26]。

6.6 量子的遠隔作用電磁力学

離れた荷電粒子間における光円錐に沿った直接相互作用に基づく電磁力学の理論を5.8節で説明した。この理論は系が完全な吸収壁の中に置かれている限り，荷電粒子間の影響の仲介としての電磁場に基づくマクスウェル－ローレンツ理論とは，ただ一点を除きすべての点で等価である。その一つの違いとは，遠離作用電磁力学は無限大の自己エネルギーをもたないことである。

量子電磁力学では状況は全く異なっている。自己エネルギー効果は新しい形で起きるであろう。たとえば，仮想光子の放出と再吸収である。しかし，自己エネルギーの値はこのとき粒子が置かれている物理的状況に依存している。特に，それは自由電子と水素中の電子とでは異なっている。ふつうの方法ではどちらに対しても無限大として現われるけれども，小さいとはいえ，この差は事実有限である。この差は高い精度で測定されて[27]，詳しい理論計算とよく一致している。明らかに，ある種の自己作用を再導入しない限り

は，遠隔作用理論ではこのような効果を予測できない。この自己作用は新理論が避けようとした無限大をどうしても持ち込むことになるのがわかる。これは確かに，5.1節のホィーラー－ファインマンの吸収体理論の価値を，その宇宙論的な意義とともに随分と減少させることになる。

古典論を量子化するふつうの方法は，系に対するハミルトニアンをつくり，カノニカル座標を選び，そしてカノニカルな交換関係をつけることである。この方法を遠隔作用理論で進めることはできない。ラグランジュアンの非局所的性質(世界線全体にわたる積分を含む(5.83)を見よ)のために，意味のあるハミルトニアンをつくることができないからである[28]。この場合にはファインマンの経路積分を用いる作用汎関数によって量子化できる。これはホイルとナーリカー(Hoyle, Narlikar)[30]によってなされた。

もっと直接的方法は[31]，量子電磁力学の通常の形式である漸近 S 行列を使うことである。この量は場の量子論へ次のように導入できる。まず，(6.10)の $U(t_2, t_1)$ に類似の展開演算子を定義する。相互作用している荷電粒子のハミルトニアンを次の二つの部分にわける。乱れを受けない部分 H_0 と，粒子間の(小さい)相互作用の効果を表わす $H_{\rm I}$ とである：

$$\exp[-iH(t_2-t_1)]=\exp[-i(H_0+H_{\rm I})(t_2-t_1)]$$

ユニタリ変換を行なって相互作用表示に移るのが便利で，そこでは $U(t_2, t_1)$ は再定義されて

$$U(t_2, t_1)=\exp(iH_0t_2)\exp[-iH(t_2-t_1)]\exp(-iH_0t_1)$$

とらり，そして微分方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2, t_1)=H_{\rm I}(t)\,U(t_2, t_1) \qquad (6.79)$$

に従うので，時間依存性はここではハミルトニアンの相互作用部分 $H_{\rm I}$ によっている。

式(6.79)の形式解は

$$U(t_2, t_1)=P\exp\left\{-i\int_{t_1}^{t_2}H_{\rm I}(t)\,{\rm d}t\right\}$$

で表わされるが，これは指数形式を展開して一項ずつ(6.79)に代入することによって証明できる。P は時間依存の演算子を時間標示の順に並べる演算子である。

散乱現象では，系の初期状態はその相互作用が無視できるように遠く離れた粒子系である。それから粒子は近づいて相互作用を行ない，そのあと再び離れ去る。散乱行列または S 行列は，展開演算子で $t_1\to-\infty$ と $t_2\to\infty$ とし

て定義される：

$$S=U(\infty,\ -)\infty=P\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty}H_{\mathrm{I}}(t)\,\mathrm{d}t\right\}$$

この S 行列を完全に共変的にするには $\int H_{\mathrm{I}}(t)\,\mathrm{d}t$ を $\int \mathscr{H}_{\mathrm{I}}(x)\,\mathrm{d}x$ で置き換えるが，ここで $\mathscr{H}_{\mathrm{I}}$ は相互作用ハミルトニアン密度であり，積分 $\mathrm{d}x$ は全時空にわたっている。量子電磁力学の場合，$\mathscr{H}_{\mathrm{I}}$ は(符号を除いて)相互作用ラグランジュアン密度 $\mathcal{L}(x)$ に等しい[32]。それで S は次のようになる：

$$S=P\exp\left\{i\int\mathcal{L}(x)\,\mathrm{d}x\right\} \tag{6.80}$$

通常の理論では $\mathcal{L}(x)$ として

$$\mathcal{L}(x)=-j^{\mu}(x)A_{\mu}(x) \tag{6.81}$$

をとり，j^{μ} は源の電流演算子，A_{μ} はヒルベルト空間での光子の**演算子**で，光子は一つの独立な力学系として扱われる。

ある特定の電磁力学過程に対する散乱振幅は，適当な初期状態 $|i\rangle$ と終状態 $|f\rangle$ とをとって，次の行列要素から計算できる：

$$\langle f|P\exp\left\{-i\int j^{\mu}(x)A_{\mu}(x)\,\mathrm{d}x\right\}|i\rangle \tag{6.82}$$

特に問題となるのは $|i\rangle$ と $|f\rangle$ が光子真空に対応するときで，その真空を $|0_{\gamma}\rangle$ と表わそう。これは無限遠に伝播する光子が存在しない場合で，ただ内的(または仮想的)光子だけが存在している。たとえば，荷電粒子の散乱はこれに含まれるが，自由空間への光子の輻射放出は含まれない。

このような特定の漸近状態をとると次の等式を証明することができる[33]。

$$\begin{aligned}&\langle 0_{\gamma}|P\exp\left\{-i\int j^{\mu}(x)A_{\mu}(x)\,\mathrm{d}x\right\}|0_{\gamma}\rangle\\&=P\exp\left\{\frac{i}{2}\int\!\!\int j^{\mu}(x)D_{\mathrm{F}}(x-x')j_{\mu}(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\right\}\end{aligned} \tag{6.83}$$

ここで D_{F} は光子に対するファインマンのプロパゲーターで，

$$D_{\mathrm{F}}(x)=\delta[(x)^2]+i\pi\frac{PP}{x^2} \tag{6.84}$$

と定義されるものである。PP は主値を表わす。

式(6.83)の右辺は場の演算子 A_{μ} を含んでいないことに注目しよう。このように初期状態と最終状態とに実の光子がないときは，電磁力学は電流-電流の相互作用で完全に記述されるわけで，遠隔作用を思い出させる。実際に，(6.83)の左辺と右辺の指数関数はそれぞれに，作用汎関数(5.20)と(5.84)

の中の相互作用項の量子力学的対応となっている。しかし，いまの場合は $D_F(x-x')$ は(5.84)の $\delta(x-x')$ とは等しくなく，虚数部分をも含んでいる〔(6.84)を見よ〕。この虚数部分が実光子(on-shell photon)交換の可能性を表わしている。こうして，(6.83)の左辺の演算子は相互作用ラグランジュアン密度(6.81)のエルミート性のおかげでユニタリではあるが，右辺の演算子は D_F の虚数部分のためにユニタリではない。

D_F の虚数部分を取り除き，そして**基本** S 行列として，(6.82)の代わりに

$$\langle f|P\exp\left\{\frac{i}{2}\iint j^{\mu}(x)\,\delta[(x-x')^2]\,j_{\mu}(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\right\}|i\rangle \qquad (6.85)$$

を用いると，遠隔作用理論の量子版が得られる。(6.85)の指数関数の中の演算子は時間対称でエルミート的ではあるが，P 演算子の存在のために表現はまだユニタリではない。けれども，ユニタリであるような(6.85)の小行列は存在する。一例は $|i\rangle$ と $|f\rangle$ がファン・デル・ワールス相互作用の基底状態に対応している場合で，そこでは実光子の存在は保存則によって許されない。他の例は完全に不透明な空洞をつくる電流の集積であって，その空洞の中ではホィーラー－ファインマンの吸収体過程により実光子の振幅は干渉によって消滅する。この場合に表式(6.85)は(6.83)の右辺と等しくなる。

実の光子の放出と吸収に対応する行列要素を得るには，宇宙を問題としている局所系と残りの完全吸収宇宙とにわける必要がある。(6.83)の右辺の指数関数の中はそのとき二つの積にわかれ，一つは局所系からの一光子放出を記述し，他は遠い宇宙でのその光子の吸収を記述するものとなる。これらの項は**形式的**に，光子演算子 A_{μ} のある S 行列(6.82)で計算した表現と等しいことがわかる[34]。

最後に，表式(6.85)は源の電流を多くの識別不能粒子を含む状態に作用する演算子 j^{μ} で記述しているが，これは古典的に識別可能粒子〔(5.84)を見よ〕によって電流 j が標示されている古典論と対照的であることに注目しよう。この識別可能性のために古典相互作用では $i\neq j$ のただし書きがつくが，量子的の場合には演算子を扱っていて関数ではないので，これは意味がない。それだから，表式(6.85)は自動的に自己作用項を含んでいる。これによって遠隔作用形式の中に観測可能な自己エネルギー効果をもたらすことができるが，通常の理論と同じ発散に導くことになる。しかし，これらの発散の除去は，光子の運動理論によらずプロパゲーター D_F の直接の修正(おそらく重力的考察または量子化時空の考察[35])によってできるであろう。

参考文献

1. P. P. Bocchieri and A. Loinger: Phys. Rev. **107** (1957) 337.
2. R. C. Tolman: *The Principles of Statistical Mechanics* (Oxford Univ. Press, London, 1938) sec. 83, 84.
3. 総説としては, R. Jancel: *Foundations of Classical and Quantum Statistical Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1969) chap. 3, 4.
4. R. C. Tolman: 上掲 2, chap. 12. R. Jancel: 上掲 3, sec. 6. 4. 1.
5. O. Klein: Z. Phys. **72** (1931) 767.
6. たとえば, L. I. Schiff: *Quantum Mechanics*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1955) p. 58.
7. たとえば, N. Bohr: *Atomic Theory and the Description of Nature* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934, 1961); *Atomic Physics and Human Knowledge* (Wiley, New York, 1958). 比較的新しい文献として, R. J. Hall: "Bohr's interpretation of quantum mechanics" Amer. J. Phys. **33** (1965) 624.
8. J. von Neumann: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, English translation (Princeton Univ. Press, Princeton, 1955).
9. たとえば, J. M. Jauch: *Foundations of Quantum Mechanics* (Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1968) p. 179.
10. E. P. Wigner: Amer. J. Phys. **31** (1963) 6; "Remarks on the mind-body question" *The Scientist Speculates*, ed. I. J. Good (Heineman, London, 1961 and Basic Books, New York, 1962). F. London and E. Bauer: *La Théorie de l'Observation en Mecanique Quantique* (Hermann, Paris, 1939).
11. H. Everett: Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 454. J. A. Wheeler: Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 463. B. S. de Witt: Physics Today **23** (1970) 30. B. S. de Witt and N. Graham (eds.): *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1973).
12. D. Bohm: Phys. Rev. **85** (1952) 166; **85** (1952) 180; **96** (1954) 208; Rev. Mod. Phys. **38** (1966) 453.
13. K. Gottfried: *Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1966) vol. 1, p. 186. A. Peres and N. Rosen: Phys. Rev. (B) **135** (1964) 1486.
14. M. Born: Ann. Phys. **3** (1948) 107; Suppl. Nuovo Cimento **6** (1949) 161. M. Born and H. S. Green: Proc. Roy. Soc. (A) **192** (1948) 166.
15. A. Daneri, A. Loinger and G. M. Prosperi: Nucl. Phys. (A) **33** (1962) 297. D. I. Blokhinstev: *The Philosophy of Quantum Mechanics* (Reidel Publishing Co, Dordrecht, Holland, 1968) p. 91.
16. A. Daneri, A. Loinger and G. M. Prosperi: Nucl. Phys. (A) **33** (1962) 297; Nuovo Cimento **44B** (1966) 119. A. Loinger: Nucl. Phys. (A) **108** (1968) 245.
17. S. Watanabe: Rev. Mod. Phys. **27** (1955) 179; Prog. Theor. Phys. Suppl.

Extra Number (1965) p. 135. Y. Aharonov, P. G. Bergmann and J. L. Lebowitz: Phys. Rev. (B) **134** (1961) 1410. R. H. Penfield: Amer. J. Phys. **34** (1966) 422.

18. C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson: Phys. Rev. **105** (1957) 1413.
19. J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay: Phys. Rev. Letters **13** (1964) 138.
20. T. D. Lee, R. Oehme and C. N. Yang: Phys. Rev. **106** (1957) 340.
21. R. S. Casella: Phys. Rev. Letters **21** (1968) 1128; **22** (1969) 554. Y. Achiman: Lettere al Nuovo Cimento **2** (1969) 301.
22. Lectures delivered at the Erice Summer School on high energy astrophysics and its relation to elementary particle physics, June 16–July 6 1972, by Y. Ne'eman.
23. G. Feinberg: Phys, Rev. **159** (1967) 1089. O. M. Bilaniuk and E. C. G. Sudarshan: Physic Today **22** May (1969) 43.
24. O. M. Bilaniuk and E. C. G. Sudarshan: 上掲 23, p. 48.
25. F. A. E. Pirani: Phys. Rev. (D) **1** (1970) 3224.
26. これに関連しては, A. Peres and L. S. Schulman: Int. J. Theor. Phys. **6** (1972) 377.
27. W. E. Lamb and R. C. Retherford: Phys. Rev. **72** (1947) 241.
28. However, see E. H. Kerner: J. Math. Phys. **3** (1962) 35; **6** (1965) 1218. R. N. Hill and E. H. Kerner: Phys. Rev. Letters **17** (1966) 1156. F. J. Kennedy: J. Math. Phys. **10** (1969) 1349, およびその文献一覧.
29. R. P. Feynman and A. R. Hibbs: *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).
30. F. Hoyle and J. V. Narlikar: Ann. Phys. **54** (1969) 207; **62** (1971) 44.
31. P. C. W. Davies: Proc. Cam. Phil. Soc. **68** (1970) 751; J. Phys. (A) **4** (1971) 836; **5** (1972) 1025.
32. N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov: *Introduction to the Theory of Quantised Fields* (Interscience, New York, 1959) pp. 206–227.
33. A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii: *Quantum Electrodynamics* (Interscience, New York, 1965) p. 302.
34. P. C. W. Davies: J. Phys. (A) **5** (1972) 1025 sec. 3.
35. F. Hoyle and J. V. Narlikar: Ann. Phys. **62** (1971) 44 sec. 5. A. Salam and J. Strathdee: Lettere al Nuovo Cimento **4** (1971) 101.

より進んだ読者には

1. R. C. Tolman: *The Principles of Statistical Mechanics* (Oxford Univ. Press, London, 1938). R. Jancel: *Foundations of Classical and Quantum Statis-*

tical Mechanics (Pergamon Press, Oxford, 1969). これらの本には量子統計力学や *H* 定理の明快な説明や，観測理論についての有用な注意がある。

2. B. S. de Witt and R. N. Graham: "Resource letter IQM-1 on the interpretation of quantum mechanics" Amer. J. Phys. **39** (1971) 724. この論文は量子力学の解釈と観測問題についての広汎な文献を含んでいる。量子力学の標準的教科書にもまた観測問題についての章が入っている。たとえば，D. Bohm: *Quantum Theory* (Prentice-Hall, New Jersey, 1951) part 6. K. Gottfried: *Quantum Mechanics*, vol. 1 (Benjamin, New York, 1966) chap. 4. D. I. Blokhinstev: *The Philosophy of Quantum Mechanics* (Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1968) chap. 13. さらにもっと基礎的な問題が論じられているのは，T. Bastin (ed.): *Quantum Theory and Beyond* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971).
3. 文献の中に含まれてはいないが量子力学の時間非対称について特別な注目をしているものは，H. D. Zeh: "On the irreversibility of time and observation in quantum theory" *Foundations of Quantum Mechanics* (Academic Press, New York, 1971).
4. B. S. de Witt and N. Graham: *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1973).
5. ホィーラー－ファインマン電磁力学の量子化はずっと以前1950年に行なわれていたことが完全に見すごされていたように思われる。G. Ludwig: "Formulation of divergence-free electrodynamics" Z. Naturforsch 5a (1950) 637. G. Süssman: "Spontaneous light emission in unitary quantum electrodynamics" Z. Phys. **131** (1952) 629.
6. P. L. Csonka: "Advanced effects in particle physics" Phys. Rev. **180** (1969) 1266.

7

終わりなき世界？

7.1 宇宙の熱死

4.2 節のフリードマン宇宙の議論を思い起こすと，宇宙の現在の状況に対しては二つの可能な終末があることが明らかである。全宇宙は再び高温高密度の位相にもどるか，永久に膨張をつづけて冷えてゆくかである。実験室では，孤立系はすぐに平衡の状態に達して，通常の時間尺度では目に立つような平衡からのずれは起こらない。この条件(一様温度条件の一つ)では系から有用なエネルギーを引き出すことはできなくて，物質はすべての実際的な目的に対しては無用なその最終状態に達したと考えられる。

全宇宙の場合には過程の緩和時間は実験室のそれよりもずっと永いが，熱力学の法則をまともに適用すると次の結論になるのは避けられない。もし膨張がつづくなら，平衡が全体に広がり，そして全宇宙はもう変化の起こることのない最終状態に達するであろう。この特別な事態は宇宙の**熱死**(heat death)として知られている。

熱死の性質は正確には実験室での平衡とは異なっている。第4章で強調したように，地球上のものにとって最も重要な熱力学的非可逆過程は太陽光の減衰によってもたらされたものである。明らかに，星の核燃料がつきるとすべての星の光の放出は止まるであろう(その前に星の新しい状態がつくられるが)。一つの星の終状熱は白色矮星か中性子星かブラックホールであろう。もちろんブラックホールだけが物質の宇宙論的終末を表わしていて，この状態にない物質は実際には準安定である(4.6 節を見よ)。銀河系の中では，ブラックホールによってまわりの物質がゆっくりと集められることが予想され

る。星間衝突は多くの星を結局はブラックホール的終末に導くが，他方では銀河系から全く蒸発させることにもなろう。アインシュタイン－ドゥ・シッターのモデルでは物質はただ“非束縛”(unbounded)となっているが，これは一時逃れのことにすぎない。というのは，どんな密度揺らぎも星や星間物質の付着により成長をつづけることが予想されるからである。しかし$k=-1$のフリードマンのモデルでは高い膨張率のおかげでこの共食い的な運命から多くの物質が救われるであろう（有限ではあるが極めてわずかなチャンスがあって，これらの物質さえも量子力学的な“トンネル効果”によってブラックホールの忘却の中へ抜けてゆくかも知れない――4.6節の後半も見よ）。

銀河間ガスと輻射のエントロピーもまた，イオン再結合と光子吸収によって増大をつづけるであろう。赤方偏移のために，すべての未吸収光子のエネルギーは銀河間ガスの最低結合エネルギー以下に落ちてしまい，その後の吸収は未再結合のイオンによってのみ起こるであろう。イオンの冷却の速さは，光子吸収による加熱と宇宙論的膨張による冷却との間の精密なバランスで決まる。温度T_iのイオンの膨張によるエネルギー損失比は$\dot{T}_i$に比例する。他方，エネルギー密度ε_γの光子場からエネルギーを得る割合は$\varepsilon_\gamma \sigma$に比例し，これは(4.13)と(5.88)とから$R^{-4}T_i^{-1/2}$に比例することがわかる。フリードマンのモデルの後期段階のようにRがtのベキで変わる場合には，平衡するときのイオン温度は$T_i \propto \left(\int R^{-4}\mathrm{d}t\right)^{2/3} = R^{-8/3}t^{2/3}$であろう。たとえば，$k=-1$のモデルでは最終的には$R\propto t$のように膨張するので$T_i \propto R^{-2}$となり，イオンは中性物質と同じ割合で冷えることになる。アインシュタイン－ドゥ・シッターのモデルでは$R\propto t^{2/3}$で$T_i \propto R^{-5/3}$となり，輻射温度と中性物質温度の中間値である。最後にもし$R\propto t^{2/5}$なら$T_i \propto R^{-1}$で，イオンは輻射と同じ割合で冷えながら輻射と平衡にある。[この結果を導くのに光子の減衰は無視した。宇宙の中の光子密度はイオン密度よりずっと高いからである。] もちろん，これは5.9節で別のやり方で見出した輻射の全吸収に対する条件となっている。その節で論じたようにこの状況は決して起こることはない。もし$R\propto t^{1/2}$より遅く膨張するならイオンの全再結合がいずれにしても起こるからである。

この素朴な解析から，宇宙はそのエントロピー最大状態に決して達することはないけれども，すべてのエントロピー増加現象の**進行の割合**は，結局ゼロに向かうように思われる。$k=-1$のフリードマンのモデルには，つねにある程度の未崩壊物質と未再結合物質があり，輻射の全面的な吸収はないの

で，温度差がいつも輻射と物質との間に存在するであろう。人知が充分に発達すれば，無限とも見えるこの有用なエネルギーの貯蔵に手をつけ，等温化を進めるかブラックホールの星食い(cannabalism)を刺激することによって，おそらく重力輻射の形でエネルギーを取り出すことができるであろう。この意味では，そのとき，$k=-1$ モデルには本当の熱死はないことになる。他方，アインシュタイン－ドゥ・シッターのモデルでは熱死が完成することになるだろう。

平衡による死か，燃える崩壊か，この不気味な選択はうれしくないので，多くの著者が宇宙的永久運動をつくることをねらった理論を提案している。こんどはそれを吟味しよう。

7.2 定常宇宙論

最も論争の多い“無熱死”論の一つは定常モデルで，一時はフリードマンのモデルのライバルにのし上るほどの人気を得たものである[1]。名前が意味するようにこのモデルは，負エントロピーの宇宙への注入という形で宇宙の連続的な再生をはかり，平衡状態による非可逆的死滅へ向かうのを避けている。これは物質の絶えざる生成によるもので，空間に一様に広がった水素原子の形となる。宇宙膨張にもかかわらず(大きな尺度での)平均密度がどこでも同じに保たれるような割合で，物質創成は起こっている。このような創成割合は極めて低く(1年に $10^{15}\,\mathrm{cm}^3$ あたり1原子)，全く検出できないものであろう。それにもかかわらず，この新しくつくられた物質は結局は遠ざかりつつある銀河間の虚空に蓄積し，そこで新しい銀河に凝縮し，それはまたふつうのエントロピー増加活動をしながらそれぞれの局所的熱死に向かう。しかし，全体で見た単位体積あたりのエントロピーは一定であろう。

定常モデルはいわゆる“完全宇宙原理”に基づいている。これは宇宙の大きな尺度での様相は時間によって変わらないとともに，(宇宙原理として)空間的位置と方向によっても変わらないと主張するものである。この新しい原理によればハッブル パラメタ $\dot{R}/R$ は一定となり，それによって

$$R \propto e^{Ht} \tag{7.1}$$

となる。この理論では宇宙は明らかに初めも終わりもなく，したがってビッグバンもないことになる。現在の物質の低エントロピー状態の源は，したがって，初期の火の玉の中で起きる過程に帰することはできなくて，その代わり(物質分布がならされていて水素の形になっている)創成条件に由来する

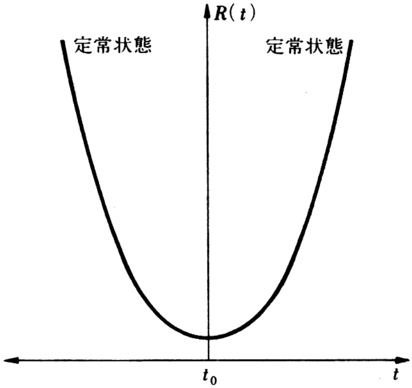


図 7.1　C 場宇宙論〔R は t_0 のまわりに対称であり，大きな $|t|$ に対しては定常状態 ($R \propto e^{\pm Ht}$) に向かう。t_0 の両側で物質はつくられ，エントロピーは矢印の時間方向に増大する。〕

とするのである。創成過程についての物理的機構を考える試みは，ホイル (Hoyle)[2]によって行なわれたが，それは負エネルギー創成，または C 場の導入によるものであった。このモデルは $T_{\mu\nu}$ の中に C 場の項をもつ場の方程式(4.2)を解くことによって，一般相対論のわく組の中で扱うこともできよう。そこには実際に $t \to \pm\infty$ に対して定常状態に近づく解が存在する(図 7.1) したがってこのモデルは時間対称であり，各分枝の中での熱力学的過程の方向は創成時の向きで決められている。しかし残念なことには，C 場宇宙論の定常状態の極限では吸収体理論の先進解のみが可能である[3]。

近年，天文学の観測的証拠も積み重なり，特に宇宙的なマイクロ波の背景輻射(これは初期の高密度状態を要求すると思われる)の発見によって，定常理論はほとんど完全に捨てられた。

7.3　振 動 宇 宙

この理論は，4.2 節と 4.4 節に述べたように高密度状態から最高値 R まで膨張して，その後高密度の終状態へ再収縮するという，閉じたフリードマンのモデルに基づいている。この節で論じようとする新しい様相は，この高密度状態がこんどは新たな膨張につづき，そしてまた収縮という繰り返しで，宇宙は R の最大と最小の値で永遠に振動するということである(図 7.2)。

このモデルは，最小値 R は $R=0$，$\varepsilon=\infty$ の特異点に対応すべきであると主張している一般相対論(少なくともその非量子形式[4])と，どの程度まで矛盾

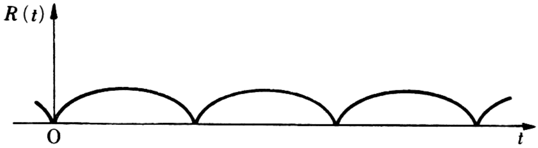


図 7.2 宇宙は R の極大と極小との間を永久に振動するが，極小のところでは既知の物理は通用しない。

しないのかというのは明らかではない。もし最小値が本当に特異点なら，各周期の特異点を通り抜けて宇宙の物理的状況を考察することは不可能である。それにもかかわらず多くの著者が[5] 連続振動宇宙モデルについて推量しているので，批判はしなければならないにしても，この節の目的のために，上の反論はあまり厳しくとりあげないことにしよう。

このモデルが熱死を避ける方法は次のようである。膨張収縮の各新しい周期は高密度の熱い火の玉から出発する。この状態の物理は第4章に論じたところで，熱力学的非可逆性の源は宇宙初期段階の変化してゆく境界条件の中にあることを示した。したがって，**すべて**の新しい周期はある負のエントロピーをもつ初期状態から出発し，これにつづく膨張収縮の中で宇宙流体のエントロピーは第4章に述べたいろいろな過程によって増大するのであろう。高密度状態はそれ以前の周期の構造を破壊するほどに激しいので，“宇宙の出直しスタート”の効果があり，時間の両方向に向かって限りなくつづいている現象である。

サイクルを限りなく繰り返してエントロピーが増加するというこの結果は，実験室熱力学から予想されるものとは著しい対比を示している。局所系で一連の膨張収縮を行なう一様流体を考えよう[6]。エントロピー増加は熱力学第2法則によって決まるもので

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\mathrm{d}E+\frac{p}{T}\mathrm{d}V+\sum_i\frac{\partial S}{\partial n_i}\mathrm{d}n_i \tag{7.2}$$

である。エネルギー E, 体積 V, 異なる流体成分のモル数 n_i が系の独立変数である。もし系が孤立し断熱的なら，$\mathrm{d}E$ も $p\mathrm{d}V$ もともにゼロとなる。この場合にエントロピーの増加する唯一の可能性は，(7.2)の最後の項で表わされる流体成分濃度の再配分によるものである。これは限りなくつづくことはできない。なぜなら，与えられたエネルギーと体積に対しては，異なる流体成分間の化学平衡に対応してエントロピーの最大値が存在するからである。この状態に達すると，流体の中ではもう変化が起こりえない。他方，もし

系が断熱的でなく外のエネルギー源につながっていると(たとえばモーターで駆動されるピストン－シリンダー系)，エネルギー源が消費されるまでエントロピーは増大してゆくであろう。これは膨張や収縮をしている流体にはいつも，平衡状態へ達するのに遅れが存在するからである。

宇宙論の場合には，共運動系の中のエントロピーに対して(7.2)に類似の式がある。共運動系の中で自分のすぐ近傍について実験をしている観測者にとっては

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\mathrm{d}(\varepsilon R^3)+\frac{p}{T}\mathrm{d}R^3+\sum_i \frac{\partial S}{\partial n_i}\mathrm{d}n_i \tag{7.3}$$

となる。(7.3)の右辺の最初の2項は，次式(7.4)〔すなわち(4.6)〕のおかげでともに消えてしまう：

$$\mathrm{d}(\varepsilon R^3)+p\,\mathrm{d}R^3=0 \tag{7.4}$$

宇宙論の場合もまた，流体のエントロピーは膨張と収縮の直接結果としては増大しない。しかし，(7.3)の最後の項の存在のおかげで，流体成分間の濃度の再調整によって多成分流体のエントロピーが増加する可能性はある。実際には，この種の重要な過程は星の光の放出であり，物質を消費して輻射場の濃度を増大している。

4.4節での1成分流体の振動モデルでは，スケール因子 $R(t)$ は最大値 R に関して明らかに対称関数であった。これらのモデルは正確に可逆的である。現在の場合は，宇宙流体は多成分間の再調整を通じてエントロピーが増大するので，全体の系の可逆性は破れている。現実には対称からのずれは小さいとしても，周期の膨張位相と収縮位相との間にはもう完全な対称はない。

これらのずれがどのように起こるかを理解するために，一般相対論でよく知られたエネルギー保存の破れに目を向けよう。孤立系さえも通常の意味では一定エネルギーをもたないのである。実際に，(7.4)を見るとわかるように，第2項(正)の圧力項の存在のために，流体要素のエネルギー密度 ε は一般的には膨張によって減少し収縮によって増大する。したがって，もし p の値が膨張中とそれにつづく収縮中とで異なっているなら，流体要素は以前の体積へ異なったエネルギーでもどることになろう。このような圧力の違いは，濃度の配分に有限な緩和時間がかかり，平衡状態への遅れが常に存在するならば，起こりうるものであろう。これは明らかに星の光の放出の場合であって，4.5節に示したように，膨張の時間尺度とは10の何乗も遅れているのである。極めて簡単にいえば，収縮位相では星の光の圧力はより大きい，なぜ

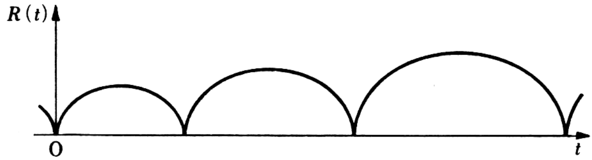


図 7.3 各サイクルでの非可逆過程が次第に振幅を増大させる。

なら星はより永く輝いていたのでより多くの星の光がまわりにあるからである。こうして，宇宙の共運動領域のエネルギーは1サイクルの後は同じ体積でも少し増大していると予想されよう。さらに，この増大したエネルギー密度は**流体の重力ポテンシャル エネルギー**の減少に相応じるもので，後者が実験室でのピストン－シリンダー実験の外的エネルギー源に似た役割を果たしている。しかし，実験室の場合と異なり，無限圧縮という終点の特異性のために系の重力エネルギーには限りがない。宇宙流体エントロピーの引き続きの増加はこうして説明がつく。[4.6節のブラックホールの議論で，ホールが重力ポテンシャル エネルギーを消費して無限のエントロピーを得ることを指摘したのを思い起こされたい。閉じたフリードマンのモデルでは全宇宙がブラックホールとなっているのである。]

奇妙なことには，古典的考察から予想されるような振動の減衰はこの非可逆過程によっては起こらず，むしろ振動は成長をつづける(図7.3)。このことは(4.4)を見ればわかるであろうが，与えられた R の値に対して ε の大きいほど $\dot{R}$ の値が大きいのである。

振動のこの累進的な成長と，各周期の間に生じる対称からの一般的なずれとは，アインシュタインの場の方程式の時間反転に対する不変性とどのように整合するのであろうか。波動方程式に関連してふれたように，解の時間対称を得るためには場の**源**もまた反転する必要がある。一般相対論の場の方程式(4.2)で，源の項はストレス エネルギー 運動量 テンソル $T_{\mu\nu}$ であって，これはもちろん**巨視的量**であり，それ自身，ふつうは可逆的ではない。本当に対称的な可逆過程は，最大膨張の点で宇宙の中のすべての粒子と波との**微視的**反転(ロシュミット型の意味で)を行なうことによってのみ可能である。この極めて特殊な状況についての議論があるので，それを次の節で吟味することにしよう。

7.4 時間対称宇宙論

熱死を避ける一つの道は完全な時間対称(ここでは古典的意味)のある宇宙

モデルを工夫することで，そうすると低いエントロピーへゆく“再生”揺らぎによって平衡へ近づくことが妨げられる。4.7節でふれたように，ボルツマン自身がこのような示唆を与えていて，彼は現在の低エントロピー状態を全宇宙の平衡状態からの巨大な揺らぎの一つと見なした。静的ニュートン宇宙では，途方もなく長い時間尺度(宇宙に対するポアンカレの回帰時間はハッブル時間の少なくとも $10^{10^{80}}$ 倍である)にわたって，このような揺らぎは無限に起こるであろう。永久に膨張をつづける宇宙モデルでは，膨張による散逸にもかかわらず銀河系規模の大きさの揺らぎが予想される。そのとき当面する面白い問題は，低エントロピーの機会が無限の数あるならばなぜ銀河系の**最初**の低エントロピー状態の中に我々は住んでいるのかということである。最初でないとすると宇宙は(途方もなく長い時間の後に)大きく膨張していて他の銀河系は我々にとって全く見えなくなっているはずである。低エントロピー状態への揺らぎを許さない(量子論での可能性は除く)一般相対論のブラックホールの存在は，この問題への一つの解答である。もしすべての銀河物質が最終的にブラックホールに取り込まれるなら(これはアインシュタイン-ドゥ・シッターのモデルでは起こるかもしれない——7.1節を見よ)，そのときは永遠の熱死が待っていることになる。

振動モデルでは，サイクル時間を信じ難いほどに永くしなければ，厄介なポアンカレ揺らぎが起きるだけの時間はない。それで相接する二つのエントロピー揺らぎの極小値を一つの振動の特異端点と見なすことができよう。これはエレガントではあるが，物理的には正当化できない。一般相対論によって支配される宇宙モデルの対称性と統計力学によって支配される相互作用粒子の閉じた系の対称性とは全く関係のない物理の二つの側面であって，両者を混同してはならない。

この最後の注意を強調するために，共運動基準系に対して完全に静止している圧力のないチリによって満たされた宇宙モデルを考えよう。この場合に宇宙膨張の反転は，遠くの物質を見ている共運動観測者に対して粒子速度のロシュミット型の反転を起こすであろう。近傍の局所的な物質は，共運動系にともかく静止しており，そしてもちろん，4.4節の議論からわかるように，エントロピー変化のない熱力学的に可逆な宇宙である。これと対照的に，運動のないチリの代わりに共運動系の中で局所的な不均一と熱運動とをもつ実際の気体を考えてみよう。そのとき，自分の近傍で少量の気体について実験を行なっている観測者は，揺らぎの存在やポアンカレ周期，そして熱力学第

2法則の存在を導き出すであろう。そして，彼の局所近傍で著しくエントロピーが減少する揺らぎは宇宙膨張最大の瞬間にちょうど始まったと考える**理由はない**と結論するだろう。4.5節の終わりに説明したように，宇宙膨張が最大に達した瞬間そのものは観測されないのである。

これらに注意すれば，ゴールド(Gold)[7]によって以前に提案された宇宙運動と熱力学との間のもっと強い相関は，いささか懐疑の目で見るべきであろう。ゴールドのモデルでは宇宙流体は振動周期の収縮位相でエントロピーの定常的な減少を行なうが，これはポアンカレ型の揺らぎの結果ではなく，空間の減少する体積によるものである。こうすると局所的熱力学過程が強く宇宙論に関係すると思われる。これは宇宙初期の状態として強い相関のある極めて特殊なものを選ぶときだけ可能であるが，これらの相関は全く観測不可能なのでそれ自身としては反対できないアイディアではある。[これはボームの好きな世界における“階層序列”によく似ている。] 初期状態としてこのようなものを選ぶのなら，系に対して初期と終期との**両方に**(低エントロピーの)境界条件をつけるほうがすっきりする。エーレンフェストの壺の実験に基づいて，クック(Cook)[8]は対称的な境界条件をもつモデルを考察した。

ゴールドは自分の提案を支持する証拠として，次のような考えを述べている。星と虚空との間の極端な非平衡は，宇宙が膨張の状態にあってエネルギーの冷い吸口として働いていることによる。そして星の光の放出は宇宙論的運動に**よる**ものと考える。この観点からは，すべての熱力学的非平衡はこの同じ原因(宇宙膨張)に基づいていると推量される。しかし，宇宙膨張は均質近似では可逆であるけれども，星の光の放出は**非可逆的**過程であるという事実を，この議論は見逃している。p.102で，熱い星から冷いまわりの空間へ向かう輻射の流れと，宇宙膨張につれて空間の定まった体積から出る輻射の流れとの区別を注意深く述べた。それで，宇宙の再収縮は宇宙的背景輻射の温度を(可逆的に)回復するであろうが，一般には，温度勾配にさからって星の光を星(極めて局所的な放出センター)にもどしはしないであろう。これらの温度勾配は再収縮の位相が充分に進むまではなお存在し，星の温度は背景輻射温度より高くなっている。ゴールドが示唆したこのような不自然な仮説は，その状況をもたらすに必要な初期条件に関する議論によって支持されるべきであるが，星の光の放出の性質からの支持は得られない。4.5節でも，星の光の放出は宇宙膨張とはほとんど全く無関係であり，さらに，夜空の暗さは宇宙の有限年齢によることを強調しておいた。

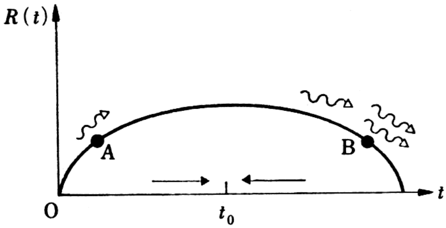


図 7.4 ゴールドの時間対称宇宙論 （矢印はエントロピー増加の方向を示す。もし A で放出された光子が“他の半分”の中の B に入り込むと，それは吸収されないで増幅されるだろう。）

ゴールドのモデルの困難はさらに，最大膨張点で起きる“切り替え”の詳しい考察からも出てくる。宇宙はその時点では熱力学的平衡に達しているという仮定すらできない状況で，熱い星から発散する球面波頭がまだ存在し，それは切り替えの後も発散波としてつづくであろう（マクスウェル方程式は転換によっても変わらないと仮定する）。これは，収縮がはじまった後も遠い銀河は赤方偏移にとどまっているであろうと述べたことと同じである。最大膨張点に関する完全な時間対称は，発散波から収縮波への瞬時の切り替え（または両者の混在）を要求する。納得できる方法でこれをまとめることはできそうもない。

ゴールドのモデルの“前”半からの遅延波が“後”半へ伝播してゆくことが許されるなら，そしてその逆もあるなら，そのときは 5.6 節でのエネルギー連鎖の問題になり，これはエントロピーを増大する荷電物質と先進波が混在するときにはいつも起こる問題のように思われる。切り替え時に吸収されないで通り過ぎたどの光子にとっても，物質と出会うとき支配している熱力学的過程は**反減衰**を生じさせるようなものであろう（図 7.4）。もし光が冷い物体の表面に出会うとすると，そのエネルギーは減少する代わりに指数関数的に**増幅**するであろう。1cm の数千分の一という薄い金属に対しても，その表皮効果としては，出てくる光子雪崩は宇宙の全光子数よりも多くなるほどのものである!! この種の整合性の問題は，反対向きの宇宙の領域が因果的に結合されるときには，どうしても起こってくるものである。

7.5 閉じた時間

これまでは，時間の**トポロジー**は無限もしくは半無限的直線のようであるという都合のよい仮定をしてきた。しかし，全宇宙の可能な時間対称につい

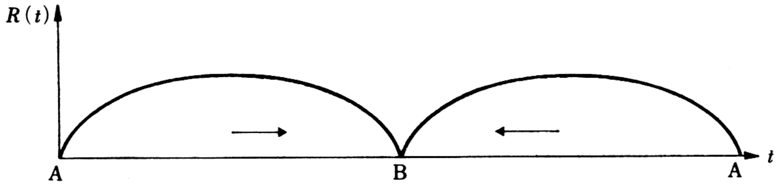


図 7.5 閉じた時間 (図を円筒のまわりに巻いて二つの A が一致していると想像せよ。矢印はエントロピー増加の向きなどを示しているが，増加は二つの“半分”の中では逆向きである。)

て考えると，円のトポロジーをもつ閉じた時間による表現のほうがより適当のようにも思われる。しかしこのことは，人々が限りない繰り返しで*事象を再経験するような周期的または回帰的世界を意味するものではない。もしそうなら，時間の“流れ”というあいまいな問題を呼び起こすことになるからである。

新しいトポロジーに出てくる時間構造の主な違いは第一に，限定した領域を除いては，“以前”(before)，“以後”(after)そして“中間”(between)という概念の廃棄である。第二に，我々が宇宙での初期条件を自由に“選び”，その成り行きを永遠にわたって追ってゆくことはもはやできないということである。その代わり，一連の推論は自己整合的でなければならない制約がある。これは吸収体理論における制約に類似していて，推論は時間に対称なはずである。

この種の理論の一変形として，筆者は膨張と収縮の**二つの**サイクルからなるモデルを考えた[9](図 7.5)。エントロピー増加のような時間非対称過程の向きはこの二つのサイクルにおいて逆ではあるが，ゴールドのモデルと異なり，各サイクルを通じては同じである。逆対称の二つの領域の接点がサイクルの間の高密度状態である。そこでは宇宙流体は熱力学的平衡に達しているので，これらはスイッチ切り替えにとって自然な点となる。たしかに，R の最小値は最大値と異なり，宇宙の極めて特殊な状態であり，そこで宇宙の“二つの半分”が接合する場所と考えられる[10]。[上記のことは局所的重力崩壊に対してさえも成立する。もしブラックホールが特異点を抜けて生き残るなら，それは同じ宇宙の中に出てくることはできない。そうとすれば漸近的観測者にとってブラックホールが地平の中に無限の時間かかって入ってしまう

* もしそうなら，筆者は次のエディントンの文に賛成せざるをえない。“同じことを何度も何度も繰り返しつづけるのは，むしろおろかと思われる。”

以前に，地平から“出てくる”ことになるからである。]

このような宇宙の中の観測者は，どちらの側に自分は住んでいるかを識別できるのだろうか。観測者の頭脳と記憶と認識の働きは熱力学的因子によって決まるものとしよう。もし時間の流れという主観的概念もまた頭脳の中で起こる過程に基づくと仮定するならば，ふつうの観測によっては一つのサイクルを他のサイクルと区別できないと思われる。もっと欲張った人は，K^0中間子は熱力学的非対称に平行か反平行かどちらかの時間の向きをもっているので，それによって宇宙の“二つの半分”の間の区別はできるということを発見するであろう。しかしネエマン(Ne'eman)によって，CPT が成り立つかぎり，物質と反物質の交換によってこの区別がなくなることが示された。別のいい方をすれば，スイッチ切り替えのときに物質と反物質を交換すればこの区別は消滅してしまうのである[12]。

もしバリオン数が最小 R を通して保存されるなら，2サイクル モデルから面白い結論がでる。一つのサイクルの間に放出された星の光に何が起こるかを考えよう。それは終点での高密度状態に入って熱化され，そして黒体背景輻射として他のサイクルに出てゆく。対称によって，後者の星の光は前者の中に黒体背景輻射として現われるだろう。

このとき熱光子のバリオンに対する(一定な)比を計算するのは，どちらのサイクルに対しても簡単である。星の光として前サイクルで放出されたエネルギーの1バリオンあたりの上限を計算するために，宇宙の中のすべての**陽子**は星の中で“料理され”てその質量の1%のエネルギーを解放すると仮定する。蓄積されたエネルギー密度は陽子の数密度 ρ と質量 m により $10^{-2}\rho m$ と表わせる。輻射理論によると黒体光子の数密度 ρ_γ は(小さな数因子を除いて)我々の単位ではエネルギー密度の3/4乗に比例することがいえる。そこで $\rho_\gamma \simeq (10^{-6}m^3\rho^3)^{1/4}$ となり，後のサイクルでの 光子/バリオン 比は次式で求められる：

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho} \simeq \left(10^{-6}\frac{m}{\rho}\right)^{1/4} \tag{7.5}$$

式(7.5)の右辺の値は物質密度 ρ として選ぶ値によって変わるが，ρ はもちろん，時代の関数である。これは星の光の赤方偏移を考慮していない表現で，赤方偏移があると最大膨張近くの領域で放出された光子の寄与は大きくなる。閉じたフリードのマンモデルはその時間の大部分をこの領域で過すので(図4.1)，サイクル全体にわたる ρ_γ の平均値は現在の観測値から大きくず

れることはありそうにない。ハッブル半径内の全粒子 N を使うと陽子密度は NH^3 の程度で，(7.5)から

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho}\simeq\left[10^{-6}N^{-1}\left(\frac{m}{H}\right)^3\right]^{1/4}$$

が得られるが，比$(m/H)^3$は，パウリ原理に従って宇宙に“入り込める”フェルミオンの全数である。よく知られた大数の一致(大きな数の間の関係)があって[13]，m/H は $N^{1/2}$ の約100倍，すなわち 10^{42} であり，そこで

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho}\simeq N^{1/8}\simeq 10^{10} \tag{7.6}$$

関係式(7.6)は新しいものではないが，説明されない“偶然の一致”とされていた[14]。この値は ρ_γ/ρ 比の上限ではあるが，筆者が現実の天文学的観測に基づいて行なった他の計算によると[9]，(7.6)よりわずかに小さいだけで，約 10^8 である。我々の時代の黒体背景輻射の温度で表わすと，その値は2.4Kを少し上まわる。これは観測値2.7Kと比べられるものである。

7.6 結　論

物理科学の主要なトピックスの中に出てくる時間非対称の重要な様相はすべて，宇宙の創成または終末に関連しているというのは注目すべき事実である。

宇宙創成についての哲学的考え方には，二つの支配的な学派がある(創成事象をもたぬモデルについてはいまは別にしておく)。伝統的に，宇宙の現状は極めて特殊なものと見なされて，創成は，その後の宇宙構造を規定するような特別な性質をもっているとされた。しかし近年における現代宇宙論の発展はこの問題に大きな影響を与えた。多くの人はいまや逆の見解に傾いている。すなわち，宇宙の現状は一つの**典型的**なもので，極めて広い範囲の初期条件から到達できるものであろう。この本での結論として，時間非対称の問題が両者の見解に提供した材料を見るのも面白いであろう。

前章までのあまり奇抜でない考察は後者の見解と矛盾しない。これを見るために，分枝系の形成の問題にちょっともどろう(3.4節)。可能なすべての初期条件の中で圧倒的多数のものは，その後のエントロピー増加をもたらすものである。極く少数のものは時間的にエントロピー減少をたどるような特別な粒子運動を与えるが，永久に低エントロピー状態を引き起こすようなものは，ゼロの測度をもっている(p.51)。したがって，単一分枝系で現実に観

測される時間非対称性は，可能な初期条件から勝手に選んだ初期条件と矛盾しない。多数の分枝系においてエントロピー増加の向きがそろっているのはこの不規則性(randomness)の良い**証拠**である。

宇宙論的な場合，もし宇宙が唯一のものであって集団に属するものではないなら，観測を用いて全宇宙の統計的な性質を表現することはできない。その代わり，創成時の極めて幅広い初期条件が観測される時間非対称と矛盾しないので，宇宙は，あたかも偶然的につくられた**かのように**振る舞っているということはいえるであろう。いいかえれば，世界の時間非対称性を説明するためには世界に関する何か特別なものを探す必要はない。むしろ，もし非対称性がなかったら，それこそ何か特別なものを探さなければならなくなったであろう！　なぜなら，おそらく測度ゼロの組を除いては，時間非対称性は可能なほとんどすべての宇宙モデルの一般的性質として現われるであろうから。[測度ゼロのモデルの例として，共運動系の中で完全に静止している粒子のみから宇宙物質が構成されているものがある。]

さらに，宇宙の初期条件は"偶然"(random)のものであると我々が**想像**してよい幾つかの理由がある。まず，宇宙はその初期特異点 $t=0$ から膨張し，宇宙の大きな尺度の運動についての境界条件がその膨張を規定するが，宇宙物質の個々の粒子に対する境界条件と整合(match)すべきであると考える理由はない。すなわち，エントロピー減少という極めてありえないような揺らぎに対応するその瞬間に，宇宙は特異点から膨張を始めたとする理由はない(同じような注意を p. 199 にも与えた)。第二に，粒子地平の存在は，極めて初期の段階では宇宙の任意に小さな領域間には因果関係はなかったことを意味する。[これは宇宙流体の中に虚の質量成分があるとしてもなお正しい[15]。]したがって，宇宙の遠く離れたところの粒子に当初相関があったとは考え難いであろう。もちろん，粒子地平の存在は相互作用の遅延という性質にまず依存しているのであるが。これは通常の場の理論では，$t=0$ での"入射"(つまり相関のある)光子や重力子やニュートリノが存在しないことになるが，これでは，初期条件の任意性を他の同様な任意性を用いて除去しただけのことである。吸収体理論ではこれはもっと強い意味となる。なぜなら，輻射が吸収されるためには，相互作用の遅延性そのものが宇宙物質の未来の熱力学的非可逆性を必要とするからである。ホィーラー－ファインマン理論ではいつもそうであるが，自己整合性が要求される：遠い未来に起こる吸収に対して物質が適当な熱力学的条件を与えるような，物質に対する"ランダム"な

初期状態が遅延輻射の存在にとって必要であり，そしてこの初期状態は逆に輻射の遅延性に依存しているのである。これは最も満足すべきことである。というのも，宇宙に対するどんな他の条件も（もちろん減少エントロピーと先進ポテンシャルをもつ完全に反転した世界を除く）これほど自己整合的ではないであろうという理由からである（p. 137 の注意も見よ）。熱力学的非可逆性は相互作用の遅延を包含するのか，あるいは遅延が非可逆性を包含しているのか，という古い論争[16]がここに復活してきた。ある著者[17]たちはこの二つの観点の等価性を主張している。

第三に，宇宙は一つの集団の一構成員であると考えられるような感じも確かにある。たとえば，7.3 節の連続的振動モデルではビッグバンは決して創成事象を表わしてはいない。その代わり，高密度状態によってわけられた膨張－収縮という無限の連続がある。これら高密度の接続位相は宇宙内容のカードの**くり直し**とみなされて，そこから各々の新しいサイクルはランダムに始まっている。他の例はエヴァリット流の量子力学の解釈であって，我々の経験する単一世界は，すべての量子的可能世界が同時に実現している全体的集団を背景としている。この状況では，多くの可能な初期状態があるわけで，その圧倒的多数は一般的にエントロピー増加世界となるであろう。いずれにしても，生命と共存可能な量子世界のみが観測されているのであろう。

宇宙の起源は特別なものではなくて，膨張は微視的振る舞いの相関を顧慮せずに始まったというのはもっともらしいが，最終的特異状態へ収縮するモデルの場合は矛盾が現われるように思われる。時間の一方の向きに進みながら，宇宙は平衡状態へ移る際の遅れのためにエントロピーをずっと増加しながら膨張と収縮をすることになる。他方，反対の時間の向きを考えると，同じような特異状態から出発するのに，このときには宇宙物質の微視的振る舞いは相互に，また大域的な運動とも強い相関があるので，宇宙が膨張や収縮をするにつれて，微視的運動は全体として大域的な運動を**規定**し，うまくエントロピーを減少させることになる。

これらの注意をさらによくわかるように，再収縮宇宙のモデルとして，外部エネルギー供給源につながったピストン－シリンダー系をもう一度考えよう。エネルギーの供給がつづく限り，7.3 節で説明したようなピストン運動に対する気体運動の遅れのために，気体のエントロピーは（圧倒的確率で）増大するであろう。しかし，エネルギー供給が尽きたとき，系は時間対称的振る舞いにもどることになる。その理由は，気体とピストンとエネルギー源を

一緒にした揺らぎはエントロピーを等しく増大も減少もさせるからである。このように，利用できる**外的**エネルギーがあってこそ，外界の時間的非対称の向きが局所系に付加されることになる。［これは，我々が装置を働かせるのに極めてまれなエントロピー減少の揺らぎがあるまで待ち受けはしない，と仮定している。］

さて宇宙論の場合には，膨張したり収縮したりする宇宙に時間非対称を付加できるような外界がない。このときのエネルギー源は，宇宙の尽きることなき重力的自己エネルギーである。それで膨張-収縮サイクルの両端が非対称的なのは全く任意的なことであって，自然の事実として受け入れなければならないように思われる。我々は過去を，世界の微視的運動と巨視的運動との間に相関がない特異状態へ向かう時間の向きとして単に**定義**するのである。

7.4 節で見たように，ある著者達はこの任意性に満足できず，この節のはじめに述べた二つの哲学的見解の最初のほうを採用した。彼らは次のように提案する。極めて特別なやり方で宇宙はつくられたもので，時間対称的宇宙にちょうど対応するような初期条件の粒子運動から出発し，宇宙は結局は低エントロピー状態にもどる。時間対称の要求はそのとき宇宙の構造に関する厳しい制約を課することになり，もし膨張と収縮の単一サイクルを考えると，このようなモデルは観測される宇宙とは両立できないほどである(もちろん，この場合にサイクルのどちらの端を“創成”とよぶかはどちらでもよい)。しかし，もしトポロジカルに閉じた時間というもっと奇妙な可能性を受け入れる気になるなら，そのときは観測される宇宙との良い一致が得られる。

時間非対称性の**源**に関して**物理**が有用な情報を供給できる限界にまで達したように思われる。これについて残っている問題は物理的というよりも哲学的であり，宇宙の集団とは何かとか，単一時空が内側から全体的な非対称をもちうるかとか，閉じた時間の概念は自由意志について許し難いことになるかどうかなどの疑問が集中することになろう。これらのトピックスやその他の疑問が，来たるべき永い間，哲学者たちを極めて忙しくさせることは間違いないであろう。

参考文献

1. H. Bondi and T. Gold: Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 108(1948)252.

2. F. Hoyle: Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **108** (1948) 372; **109** (1949) 365.

3. P. C. W. Davies: J. Phys. (A) 5 (1972) sec. 8, 1722.

4. 将来の量子化理論がこの特異性を避けることができるかもしれない点について，フリードマンのモデルを用いて論じられた。B. S. de Witt: Phys. Rev. **160** (1967) 1113.

5. R. C. Tolman: *Relativity Thermodynamics and Cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1934) sec. 174. J. D. North: *The Measure of the Universe* (Clarendon Press, Oxford, 1965) chap. 18. W. Bonner: *The Mystery of the Expanding Universe* (Macmillan, New York, 1964 and Eyre and Spottiswoode, London, 1965) p. 123.

6. ここでの議論は次の 2 冊と極めて関連深い。R. C. Tolman: 上掲 5, pp. 135, 327–30. H. Zanstra: Proc. Kon. Ned. Acad. Wetens. **60** (1957) 285, 298.

7. T. Gold: "The arrow of time, in 11th International Solvay Congress" *La Structure et l'Evolution de l'Universe* (Edition Stoops, Brussels, 1958); Amer. J. Phys. **30** (1962) 403; "Arrow of time" *Recent Developments in General Relativity* (Pergamon-Macmillan, New York and Warsaw, 1962). その物理的基礎に疑問はあるが，この想像的理論はかなりの支持を得た。たとえば，H. Bondi: The Observatory 82 (1962) 133. D. L. Schumacher: Proc. Cam. Phil. Soc. **60** (1964) 575; "M. Gell-Mann comments" *Proceedings of the Temple University Panel on Elementary Particles and Relativistic Astrophysics.* Y. Ne'eman: Int. J. Thoor. Phys. 3 (1970) 1. P. T. Landsberg: Studium Generale 23 (1970) 1108, reprinted in *The Nature of Time*, ed. J. T. Fraser, F. C. Haber and G. K. Muller (Springer, Berlin, 1972).

8. W. J. Cocke: Phys. Rev. **160** (1967) 1165. H. Schmidt: "Model of an oscillating cosmos which rejuvenates during contraction" J. Math. Phys. 7 (1966) 495.

9. P. C. W. Davies: Nature Physical Science **240** (1972) 3.

10. たとえば，R. Penrose: "Structure of space-time" *Batelle Rencontres*, ed. C. M. de Witt and J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968) p. 222. F. Hoyle and J. V. Narlikar: Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **155** (1971) 305.

11. Y. Ne'eman: Int. J. Theor. Phys. 3 (1970) 1. A. Aharony and Y. Ne'eman: Int. J. Theor. Phys. 3 (1970) 437.

12. M. G. Albrow: Nature Physical Science **241** (1973) 56.

13. たとえば，D. W. Sciama: *Modern Cosmology* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971) p. 124.

14. E. R. Harrison: Physics Today, 25 December (1972) 30.

15. P. C. W. Davies: Some cosmological consequences of imaginary mass (to be published).

16. A. Einstein: Phys. Z. **10**(1909)185, 323. A. Einstein and W. Ritz: Phys. Z. **10**(1909)605.

17. O. Costa de Beauregard: "Irreversibility problems" *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, ed. Y. Bar-Hillel (North Holland, Amsterdam, 1915) p. 326.

より進んだ読者には

1. 宇宙の"終末"についての詳細および閉じたフリードマンのモデルについては，M. J. Rees: "The collapse of the universe: an eschatological study" The Observatory **89**(1969)193. 永久に振動するモデルについては，P. C. W. Davies: "The thermal future of the universe" Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **161**(1973)1.

2. ゴールドのモデルのより進んだ研究は，L. S. Schulman: "Correlating arrows of time" Phys. Rev. (D) **7**(1973)2868.

3. 周期的または閉じた時間の概念についての考察や文献は次の2冊にある。J. D. North: *The Measure of the Universe* (Clarendon Press, Oxford, 1965) chap. 18. A. Grünbaum: *Philosophical Problems of Space and Time* (Knopf, New York, 1963).

4. 反対の時間の向きをもつ，宇宙の異なる"二部分"が示唆されたのは，F. R. Stannard: "Symmetry of the time axis" Nature **211**(1966)693.

索　引

あ　行

さ 行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

訳者略歴

戸田盛和（とだ もりかず）

1940年　東京帝国大学理学部物理学科卒業
1951年　理学博士
現　在　東京教育大学名誉教授
　　　　横浜国立大学教授
著訳書　楕円関数論入門（日本評論社）
　　　　電磁波と物性（訳，岩波書店）
　　　　力学—新しい視点にたって—（共訳，培風館）
　　　　振動論（培風館）
　　　　非線形格子力学（岩波書店）

田中　裕（たなか ひろし）

1950年　京都大学理学部物理学科卒業
1956年　Dr. ès Sci.
現　在　横浜国立大学教授

昭和54年6月10日　初版発行

時間の物理学
—その非対称性—

原著者　P. C. W. デイビス
訳　者　戸田盛和
　　　　田中　裕
発行者　山本健二
発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256(代表)・振替 東京 4-44725

定価 ¥ 2500.

中央印刷・若林製本

訳者の承認をえて検印を省略しました

3042-2141-6955